ランダム媒質中における散乱減衰に対する因果律からの制約：スカラー波の場合

河原　純（茨城大学理学部地球生命環境科学科）

1.　はじめに

Wu (1982)と Sato (1982, 1984)によって提唱されたランダム媒質中の散乱減衰の理論は、今日、地震波の減衰を説明づける標準的理論となっている。この理論はボルン近似に基づき、構造のランダムな摂動による散乱波のパワーの総和によりQ^{-1}を定義する。その際、ある角度θ_C以内の前方散乱は減衰に寄与しないと見なす（Wu, 1982）か、あるいはある波数 $\upsilon_C k$（k は入射波の波数）以上の長波長不均質成分は減衰ではなく走時の揺らぎに寄与するとしてその効果を補正する(Sato, 1982, 1984)。両仮定はほぼ（スカラー波の場合には厳密に）等価であり、これにより通常のボルン近似で生じるQ^{-1}の高周波極限での不合理な発散が回避される。しかしθ_C（$= 2\sin^{-1}[\upsilon_C/2]$）の値は自明ではなく、Wu は$\theta_C = 90^\circ$（$\upsilon_C = \sqrt{2}$）、Sato は $\upsilon_C = 1/2$（$\theta_C \approx 29^\circ$）を先験的に仮定した。後年、実験的に評価された$\theta_C$の推定値の多くは $15^\circ \sim 45^\circ$ の範囲内に収まるものの、数度程度から 90° に至るまで広くばらつき、決着はついていない（e.g., Sato and Fehler, 1997）。

減衰性波動は必然的に分散を伴う。減衰性波動が因果律を満たすためには、位相速度 $c(\omega)$と減衰係数 $a(\omega) = \omega / 2c(\omega)Q(\omega)$（$\omega$ は入射波の角周波数）の間にいわゆる Kramers-Kronig の関係が要請される。それゆえ、$c(\omega)$の値に対し何らかの制約を加えると、因果律を介して$Q^{-1}(\omega)$の関数形（それゆえθ_C値）にも制約が課される。本研究ではスカラー波の散乱減衰について、θ_Cと$c_0 = c(0)$および$c_\infty = c(\infty)$の間に成り立つ関係を求め、さらにθ_C値が不均質の性質に依らず一意に求められることを示す。

2.　C_0 および C_∞と θ_C の関係

以下、密度は一定とし、媒質の局所的速度 $V(\boldsymbol{x})$（$\boldsymbol{x}$ は座標）が帯びる揺らぎは一様・等方的でかつ十分弱いと仮定する。このとき、Kramers-Kronig の関係より次式が導かれる（Aki and Richards, 1980; Beltzer, 1989; Fang and Müller, 1996）。

$$\frac{c_\infty}{c_0} = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q^{-1}(\omega)}{\omega}\, d\omega \tag{1}$$

（それゆえ$c_0 < c_\infty$）。同式に Wu (1982)が導いた 3 次元の場合の理論解

$$Q^{-1}(k) = \varepsilon^2 k\left[P_1(2k\sin\frac{\theta_C}{2}) - P_1(2k)\right], \qquad P_1(K) = \int_{-\infty}^{\infty} N(r)\, e^{jKr} dr \tag{2}$$

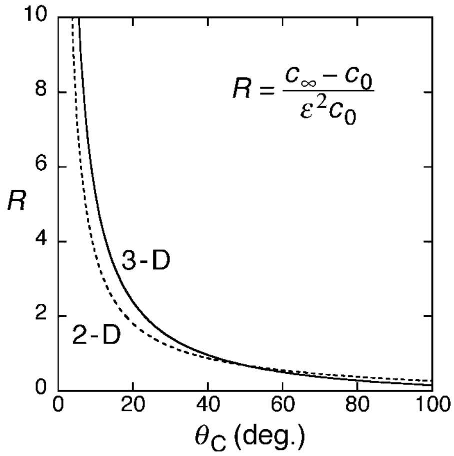
を代入する。ただし $P_n(K)$は速度の揺らぎδV（$= V - V_0$， $V_0 \equiv \langle V \rangle$）の n 次元パワースペクトル、K は揺らぎの波数、$k = \omega / V_0$，$N(r) = \langle \delta V(\boldsymbol{x})\, \delta V(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle / (\varepsilon V_0)^2$（$r = |\boldsymbol{r}|$）と$\varepsilon^2 = \langle \delta V^2 \rangle / V_0^2$ はそれぞれ揺らぎの自己相関関数と分散である。(1)と(2)に由来する 2 重積分は $N(r)$の関数形と無関係に評価でき、

$$\frac{c_\infty}{c_0} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[1/\sin\frac{\theta_C}{2} - 1\right] \tag{3}$$

を得る。2 次元の場合も、Frankel and Clayton (1986)が求めた解に基づけば同様な計算により

$$\frac{c_\infty}{c_0}=1+\frac{\varepsilon^2}{\pi}\cot\frac{\theta_C}{2} \tag{4}$$

が得られる。両者の結果を右に図示する。



3．スカラー波の散乱減衰に関する θ_C 値

c_0（あるいは媒質の巨視的弾性定数）は、一般には $N(r)$を指定するだけでは決まらない。しかし、剛性率が一定な弾性体の P 波速度については例外的に唯一の解を持つ（Hill, 1963）。特に剛性率 0 の音響的極限では

$$c_0=<V^{-2}>^{-1/2}\doteq V_0(1-\frac{3}{2}\varepsilon^2) \tag{5}$$

となる。一方、c_∞については以下のように考えるのが合理的であろう。いま、x_3方向への短波長平面波の伝播を考える。その波面が$x_3=0$から$x_3=L$まで伝わる間に生じる走時の揺らぎは、波線の回折を無視すれば次式で与えられる。

$$\delta t(x_1,x_2,L)=\int_0^L\left[V_0^{-1}-V(\boldsymbol{x})^{-1}\right]dx_3 \tag{6}$$

Sato (1982, 1984)の理論ではδtを補正して走時を揃えた後の波形の減衰を評価する。よってδtの平均値$<\delta t>\doteq-\varepsilon^2 L/V_0$に対応する速度を$c_\infty$と見なすべきである。即ち、

$$c_\infty\doteq\frac{L}{L/V_0-<\delta t>}=\frac{V_0}{1+\varepsilon^2}\doteq V_0(1-\varepsilon^2) \tag{7}$$

となる。これは V の波線理論的平均値$V_{RT}\equiv<V^{-1}>^{-1}$と一致する。以上の結果を (3)と(4)に代入すれば、3 および 2 次元の場合についてそれぞれ

$$\theta_C^{(3D)}=60^\circ\ \ (\upsilon_C^{(3D)}=1),\qquad \theta_C^{(2D)}\doteq 65^\circ \tag{8}$$

という結果が得られる。驚くべきことに、θ_C値は不均質性の性質（$N(r)$およびε^2）に一切依存しない。本研究の結果はスカラー波の場合に限定されるものの、θ_C値を理論的に推定したおそらく最初の例である。なお、冒頭で述べたように、θ_Cに関する過去の実験値の多くは(8)の値より小さい。現実の波動は伝播するに連れて波線の回折の効果により見かけ上c_∞が増大する（e.g., Müller *et al*., 1992）が、これは(1), (2)式によればθ_Cの減少を意味する。よって上記不一致は回折の影響によるものかも知れない。

参考文献

Aki, K., and P. G. Richards, 1980, *Quantitative seismology*, W. H. Freeman, San Francisco; Beltzer, A. I., 1988, Pure Appl. Geophys., **128**, 147-156;　Fang. Y., and G. Müller, 1996, Pure Appl. Geophys., **148**, 269-285;　Frankel, A., and R. W. Clayton, 1986, J. Geophys. Res., **91**, 6465-6489;　Hill, R., 1963, J. Mech. Phys. Solids, **11**, 357-372; Müller, G., M. Roth, and M. Korn, 1992, Geophys. J. Int., **110**, 2-41;　Sato, H., 1982, J. Geophys. Res., **87**, 7779-7785;　Sato, H., 1984, J. Geophys. Res., **89**, 1221-1241;　Sato., H., and M. C. Fehler, 1997, *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*, Springer-Verlag, New York;　Wu, R. S., 1982, Geophys. Res. Lett., **9**, 9-12.