

2次元ランダム媒質における円筒波のエンベロープ拡大： マルコフ近似に基づく理論的導出と数値計算結果との比較

東北大学・院・理 地球物理学専攻 佐藤春夫
sato@zisin.geophys.tohoku.ac.jp
ロスアラモス国立研究所 Mike Fehler

高周波数地震波のエンベロープ形状

高周波数の地震波 (> 1 Hz) の伝播には、地下の不均質構造による散乱の影響が大きく現れる。震源距離が100 km よりも遠くなると、微小地震の直達波の波形は大きく崩れ、断層運動から予想されるような単純な波形とは全く異なる様相を示すことが知られている。このようなエンベロープの崩れ方は、強い前方散乱、多重経路、あるいは回折の影響の効果として研究されてきた。なかでも、波動方程式を放物近似した上で統計的に扱いエンベロープを直接的に導出するMarkov近似法 [Lee and Jokipii, 1975] は、優れた方法として知られている。Sato [1989], Scherbaum and Sato [1991], Obara and Sato [1995]らは、観測されたS波のエンベロープ形状をこの理論に基づいて解析し、テクトニクスとの関連においてその特徴を議論してきた。しかし、これまで用いてきた理論は平面波が半無限不均質構造に入射するといった簡単なモデルであって、点震源からの輻射のような場合に幾何減衰を考慮することが十分には出来ていない。さらに詳しく地震波のエンベロープ形成を議論するには、無限媒質中で点震源からの輻射の場合についての理論的考察が必要とされている。本稿では、Shishov [1974]らの理論に基づき、2次元の場合のエンベロープを導出すると共に、その理論の適応領域を波動場の数値計算の結果と比較して検討する。

Markov近似によるエンベロープの数学的導出

不均質媒質において、原点に置かれた点震源から輻射された外向円筒波 (2次元) を考察する。速度場が $V(\mathbf{x}) = V_0(1 + \xi(\mathbf{x}))$ で与えられ、そのゆらぎが十分小さい場合 ($|\xi| \ll 1$)、スカラー波 $u(\mathbf{x}, t)$ は次式に従う。

$$\left(\Delta - \frac{1}{V_0^2} \partial_i^2 \right) u + \frac{2}{V_0^2} \xi \partial_i^2 u = 0 \quad (1)$$

伝播距離が波長や相関距離よりも十分長いとき ($r \gg 1/k$, $r \gg a$)、外向円筒波を次の様を書くことができる。

$$u(r, \theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{U(r, \theta, \omega)}{\sqrt{kr}} e^{i(kr - \omega t)} \quad (2)$$

ここで、波数 $k = \omega/V_0$ であり、 $U(r, \theta, \omega)$ は外向調和波の振幅である。波長が相関距離よりも十分短いとき ($a \gg 1/k$)、振幅 U は伝播距離 r に関して緩やかに変化する。このとき、 U は放物型波動方程式に従う。

$$2ik\partial_r U + \frac{\partial_\theta^2 U}{r^2} - 2k^2 \xi U = 0 \quad (3)$$

ここで，距離 r において，波線に直交する面上の 2 点の 2 周波数相互相関関数 (TMCF) を定義する [Ishimaru, 1978]:

$$\Gamma_2(\theta', \theta'', r, \omega', \omega'') \equiv \langle U(\theta', r, \omega') U(\theta'', r, \omega'')^* \rangle \quad (4)$$

波動の強度 \hat{I} は，この TMCF のフーリエ変換の形で書かれる．

$$\hat{I}(r, t, \omega_c) \approx \frac{1}{k_c r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d \Gamma_2(\theta_d = 0, r, \omega', \omega'') e^{-i\omega_d(t - r/V_0)} \quad (5)$$

これは，バンドパスフィルタを通した波形の自乗振幅のエンベロープと考えて良い．ランダム媒質が統計的に一様でほぼ単色の波の場合には，Markov 近似を用い，Lee and Jokipii [1975a, b] および Shishov [1974] に従って TMCF Γ_2 に対する方程式を導くことができる．

$$\partial_r \Gamma_2 + i \frac{k_d}{2k_c^2 r^2} \partial_{\theta_d}^2 \Gamma_2 + k_c^2 [A(0) - A(r\theta_d)] \Gamma_2 + \frac{k_d^2}{2} A(0) \Gamma_2 = 0 \quad (6)$$

ここで， $\theta_d = \theta' - \theta''$ ，中心角周波数 $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ， $\omega_d = \omega_1 - \omega_2$ ， $k_c = \omega_c/V_0$ and $k_d = \omega_d/V_0$ である．関数 A は自己相関関数の一次元積分であり，ランダム媒質がガウス型の自己相関関数で表されるときの ($R(x) = \varepsilon^2 e^{-x^2/a^2}$) には，

$$\begin{aligned} A(r\theta_d) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} R(x, r\theta_d) dx = \sqrt{\pi} \varepsilon^2 a \exp(-r^2 \theta_d^2 / a^2) \\ &\approx \sqrt{\pi} \varepsilon^2 a \left[1 - (r\theta_d/a)^2 \right] \quad \text{for } r\theta_d \ll a \end{aligned} \quad (7)$$

と表され， Γ_2 は次のような積で表される．

$$\Gamma_2 = {}_0\Gamma_2 e^{-\omega_d^2 A(0) r / 2V_0^2} \quad (8)$$

この指数関数項は，異なる波線の走時のゆらぎの統計的平均という意味を持つ．時間を固定してアンサンブル平均としての MS エンベロープを考えるとときには Γ_2 を，一つの波形の MS エンベロープ (時間的平滑化) を考えるとときには ${}_0\Gamma_2$ だけを考えれば良い．

原点近傍における強度が $\delta(t - r/V_0)/2\pi r$ の場合， $r = R$ での強度を次のように解析的に求めることができる (3次元の場合には Shishov [1974] によって解かれている)．

$$\hat{I}(R, t) = \frac{1}{2\pi R} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d \sqrt{\frac{2e^{\pi/4} \sqrt{\omega_d/V_0 k_M}}{\sin(2e^{\pi/4} \sqrt{\omega_d/V_0 k_M})}} e^{-i\omega_d(t - R/V_0)} \quad (9)$$

ここで，特徴的な波数は

$$k_M \equiv \frac{2k_c^2 a_1^2}{R} = \frac{2a}{\sqrt{\pi \varepsilon^2 R^2}} \quad (10)$$

であり，特徴的な時間スケールは $t_M = 1/V_0 k_M = \frac{\sqrt{\pi \varepsilon^2 R^2}}{2a}$ であって，周波数に依存しない．これはガウス型自己相関関数の場合の特徴である．時空間における表現はFFTを用いて求めることができる．ここで強度の時間積分が保存すること ($\int_{R/V_0}^{\infty} \hat{I}(R,t) 2\pi R dt = 1$) に注意する．

エンベロープの形状

Fig. 1 は， ${}_0\Gamma_2$ から求めた強度の時間変化（幾何減衰項の補正済み）であって，最大値の着信の遅れと滑らかに減少するエンベロープが導かれている．MSエンベロープの最大ピークの着信の遅れは $0.12 t_M$ ，最大値の半分に至るまでの時間は $0.29 t_M$ ，RMSエンベロープが最大値の半分になるまでの時間は $0.44 t_M$ である．Fig. 2 には， ${}_0\Gamma_2$ から求めた強度の時間変化（走時のゆらぎの補正済み，実線）と， Γ_2 から求めた強度の時間変化（走時のゆらぎの効果を含む，点線）を示す．Fig. 3 には，3種類の導出法によるRMSエンベロープを示す．太実線は差分法によるもののアンサンブル平均（30のシミュレーション）であり，細実線はMarkov近似法によるもの（ Γ_2 から求めた走時のゆらぎの効果を含むもの），点線はLocal Rytov法 [Fehler et al., 1998] と呼ばれるものである．ここで，ランダム媒質は平均速度 4 km/sでガウス型自己相関関数（ $a=5$ km, $\varepsilon=0.05$ ）で表されるとする．震源での波形は2 HzのRicker waveletであり，観測点までの距離は 200 km，空間のグリッドサイズは50 m，時間ステップは0.004 s である．

Markov近似法によって直接的に導かれたエンベロープは，着信から最大ピーク，そして振幅が半分程度に落ちるあたりまで，差分法によるエンベロープと比較的良く一致した結果を示している．しかし良く見ると，最大ピークは差分法の結果よりもやや早く現れ，時間幅の拡大は少し小さい．Local Rytov法によるエンベロープはMarkov近似法の結果に良く一致している．しかしそれ以降の時間では，差分法によるエンベロープの方が他の2つの方法でのエンベロープよりも大きい値を示す．これは，差分法のみが広角度の散乱を忠実に取り扱っていることによる．今後，前方散乱のみを扱うMarkov近似の利点を取り入れながら，さらに広角度の散乱の効果を取り入れていく方法を開発することが望まれている．これは，Markov近似によるエンベロープ形成の理論と輻射伝達理論の融合の上のみ，可能であろう．

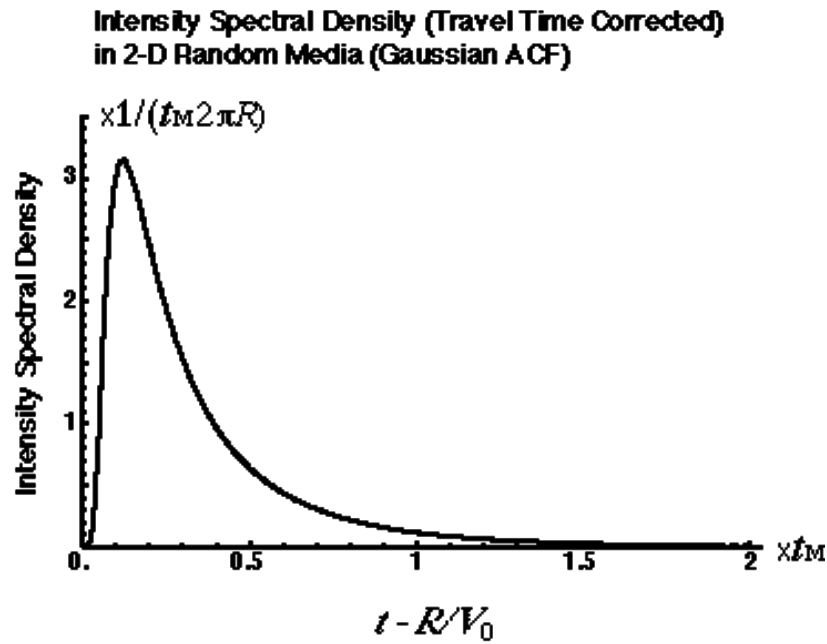


Figure 1. Temporal change in the intensity spectral density at a distance R in 2-D random media characterized by a Gaussian ACF vs. lapse time, where t_M is the characteristic time. It shows the travel time corrected solution.

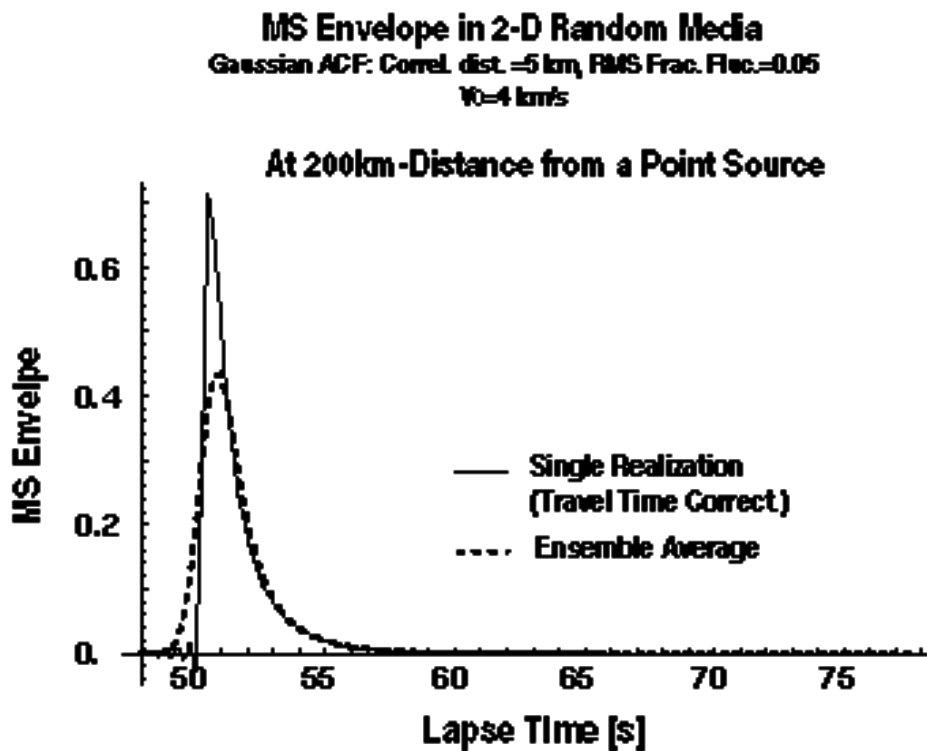
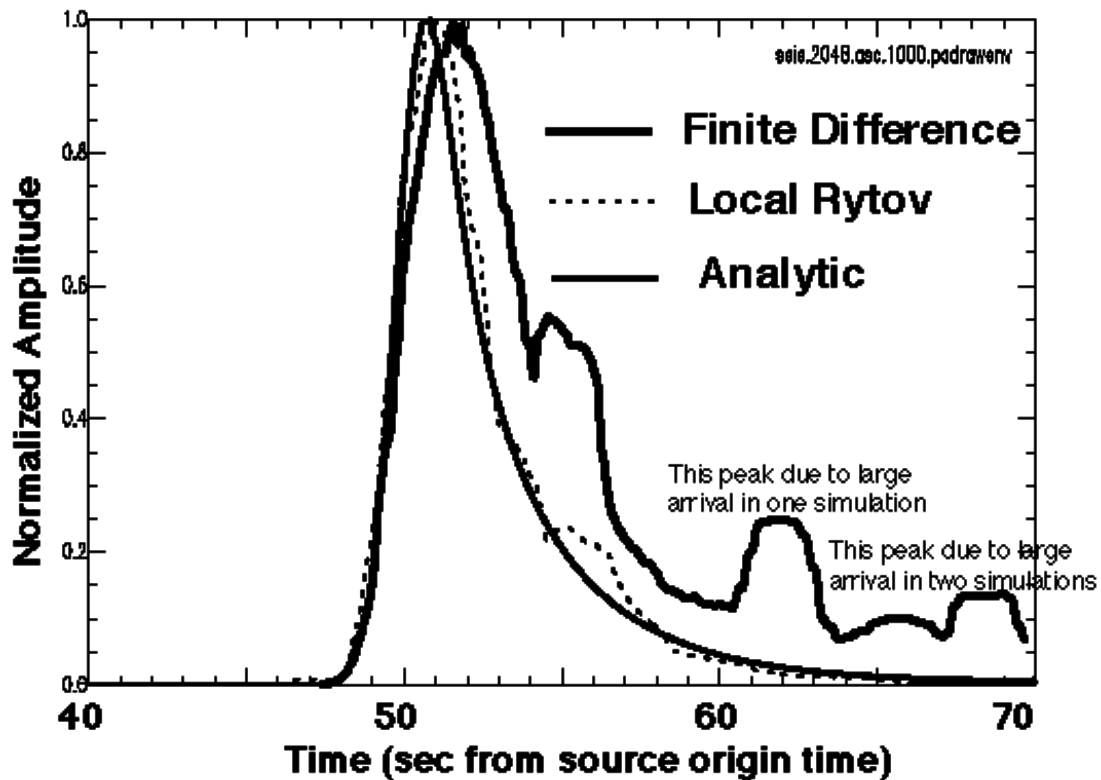


Figure 2. Envelope broadening at 200 km distance from a point source in 2-D random media, where the randomness is characterized by the Gaussian ACF. Solid and broken curves for the MS envelope with travel time corrected (single realization) and that without travel time correction (ensemble average).

RMS Envelopes Calculated Using Local Rytov and Finite Difference



Envelopes calculated for Gaussian Random Media
Correlation length = 5 km, $\epsilon = .05$, $V_0 = 4$ km /s
2 Hz Ricker Source, Receiver 200 km distant
Envelope is from 30 simulations (square, smooth, sum)

Figure 3. Envelope broadening at 200 km distance from a point source in 2-D random media, where the randomness is characterized by the Gaussian ACF.