

散乱体でのエネルギートラップを考慮した
エネルギー輸送理論に基づく波形エンベロープ形成のモデル

東北大学大学院・理学研究科・地球物理学教室 佐藤春夫・早川俊彦
e-mail: sato@zisin.geophys.tohoku.ac.jp

高周波数の地震波形エンベロープ形成には地球のかなりランダムな不均質構造による散乱過程が大きく寄与しており、それによるインコヒーレント性に着目して波の自乗振幅（パワー）の加算性を取り入れることの重要性が指摘されてきた。散乱媒質中でのエネルギー伝播については、震源からの非球対称輻射(Sato et al., 1997), フラクタル的な散乱体分布 (Sato, 1995), 深さ分布を取り入れた考察 (Hoshiya, 1994; Gusev, 1995), 非等方散乱の考察 (Sato, 1994, 1995), 非球対称輻射と非等方散乱の同時考察(渡邊・他, 1996) 等, エネルギー輸送理論にもとづいた色々な試みが行われてきた。一方, 波動理論に基づく多数のクラックや空孔による多重散乱の研究は, 特に境界積分法を用いて精力的に行われるようになってきた (Yomogida and Benites, 1996; Murai et al., 1995)。この2つのアプローチの基本的な違いは, 波動場そのものを扱うかエネルギーを扱うかによるが, 散乱体によるエネルギーのトラップを考察しているかどうか大きな違いを生み出す要因となっている。従来のエネルギー輸送理論では, 入射波が散乱体に当たると直ちに散乱波が生成することが仮定されていた。低速度物体では, その固有振動や境界面波等の形でエネルギーを一時トラップし, そして徐々に放出する事ができる。本稿では, 散乱過程にこのような時間遅れを取り入れた上で, 散乱媒質中でのエネルギーの伝播過程を考察することを試みる。

散乱断面積 σ_0 の等方散乱体が密度 n で, 速度 V_0 で規定される 3次元空間に分布しているとする (Fig. 1)。内部減衰は無いものとする。この場合の全散乱係数は $g_0 \equiv n\sigma_0$ で与えられる。入射波が散乱体に当たってから特徴的な時間 T の遅れを持って散乱波を生成すると考え, 散乱の素過程を次の形で表すことにする (Fig. 2)。

$$g(t) = \frac{g_0}{T} e^{-t/T} H(t) \quad \text{但し} \quad \int_0^{\infty} g(t) dt = g_0 \quad (1)$$

エネルギー密度に対する積分方程式は, 次の畳み込み積分で与えられる。

$$E(\mathbf{x}, t) = W G(\mathbf{x}, t) + V_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') g(t' - t'') E(\mathbf{x}', t'') dt' dt'' d\mathbf{x}' \quad (2)$$

散乱体の中にトラップされるエネルギーは, このエネルギー密度には含まれない。コヒーレント成分 (直達波) に対するグリーン関数は

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi V_0 r^2} H(t) \delta(t - r/V_0) e^{-V_0 g_0 t} \quad (3)$$

で与えられる。この系は, 極限 $\lim_{T \rightarrow 0} g(t) = g_0 \delta(t)$ で従来のモデルに一致する。

G と g を時間 t' について畳み込みを行ったものを G_1 で表す.

$$\begin{aligned}
G_1(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{1}{g_0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t-t') g(t') dt' \\
&= \frac{1}{g_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi V_0 r^2} H(t-t') \delta(t-t'-r/V_0) e^{-V_0 g_0(t-t')} \frac{g_0}{T} e^{-t'/T} H(t') dt' \\
&= \frac{1}{4\pi V_0 T r^2} e^{-(g_0-1/V_0 T)r} e^{-t'/T} H(t-r/V_0)
\end{aligned} \tag{4}$$

これらを用いて, (2)のエネルギー輸送方程式を次のように表す事ができる.

$$E(\mathbf{x}, t) = W G(\mathbf{x}, t) + V_0 g_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}', t-t') E(\mathbf{x}', t') dt' d\mathbf{x}' \tag{5}$$

ここで, 簡単のために次の様に無次元化を行う.

$$\bar{t} = V_0 g_0 t, \quad \bar{\mathbf{x}} = g_0 \mathbf{x}, \quad \bar{G} = \frac{G}{g_0^3}, \quad \bar{G}_1 = \frac{G_1}{g_0^3}, \quad \bar{E} = \frac{E}{W g_0^3}, \quad \text{and } v = g_0 V_0 T \tag{6}$$

無次元化した方程式系は, 次の3式で表される.

$$\bar{E}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \bar{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}_1(\bar{\mathbf{x}}-\bar{\mathbf{x}}', \bar{t}-\bar{t}') \bar{E}(\bar{\mathbf{x}}', \bar{t}') d\bar{t}' d\bar{\mathbf{x}}' \tag{7}$$

$$\bar{G}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{4\pi \bar{r}^2} H(\bar{t}) \delta(\bar{t}-\bar{r}) e^{-\bar{t}} \tag{8}$$

$$\bar{G}_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{e^{-(v-1)\bar{r}/v-\bar{t}/v}}{4\pi v \bar{r}^2} H(\bar{t}) \delta(\bar{t}-\bar{r}) \tag{9}$$

この系は, 空間についてフーリエ変換, 時間についてラプラス変換を用いる事により, 形式的に解くことができる.

$$\hat{\hat{G}}(k, s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}} \int_0^{\infty} d\bar{t} e^{-s\bar{t}} G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{k}{s+1} \tag{10}$$

$$\hat{\hat{G}}_1(k, s) = \frac{1}{vs+1} \hat{\hat{G}}(k, s) = \frac{1}{(vs+1)k} \tan^{-1} \frac{k}{s+1} \tag{11}$$

これらを用いて, 次のようにフーリエ・ラプラス領域でのエネルギー密度を得る.

$$\hat{\hat{E}}(k, s) = \frac{\hat{\hat{G}}(k, s)}{1-\hat{\hat{G}}_1(k, s)} = \frac{\frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{k}{s+1}}{1-\frac{1}{(vs+1)k} \tan^{-1} \frac{k}{s+1}} \tag{12}$$

このフーリエ・ラプラス逆変換から、時空間での解を得ることができる。実際には、一次散乱エネルギー密度は実空間で積分を行い、FFTを用いる逆変換は2次以上の多重散乱項のみに用いるという操作が必要である。 $v=0$ （エネルギートラップが無い場合）と0.1（少しある場合）について求めたエネルギー密度（速度波の自乗振幅に対応）について、その時間変化曲線をFig. 3に、空間分布をFig.4に示す。震源での輻射継続時間を0.1と短くとってあるので直達エネルギーが大きく見えるが、散乱体によるエネルギートラップの影響は直達波の直後で大きく、特に震源近くで顕著であることがわかる。特に時間変化の形から、直達波のエンベロープ形状を大きく崩すことがわかる。また、時間が経過するに従って、コーダレベルはエネルギートラップが無い場合の解に漸近することがわかる。

全エネルギーの時間変化については、(12)式の波数ゼロでの値から

$$\hat{E}(0,s) = \int_0^{\infty} e^{-s\bar{t}} d\bar{t} \iiint \bar{E}(\bar{\mathbf{x}},\bar{t}) d\bar{\mathbf{x}} = \frac{vs+1}{vs^2+(v+1)s} = \frac{1}{v+1} \frac{1}{s} + \frac{v}{v+1} \frac{1}{s+\left(1+\frac{1}{v}\right)} \quad (13)$$

を得る。この逆変換から

$$\iiint \bar{E}(\bar{\mathbf{x}},\bar{t}) d\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{v+1} \left\{ 1 + ve^{-(1+1/v)\bar{t}} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{at } \bar{t} = 0 \\ \frac{1}{v+1} & \text{as } \bar{t} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14)$$

を得る。即ち、輻射されたエネルギーの内 v で規定される一定の割合は、拡がって伝播する波面の内側に分布する散乱体の中に蓄えられることがわかる (Fig. 5)。

散乱体によるエネルギートラップの現象を(1)のような簡単な形で表し、(2)のような時間領域での畳込みの形で取り入れることにより、多重散乱過程をエネルギー輸送理論に基づいて定式化することができた。(1)をもう少し現実的な形に変え、非等方散乱の場合に拡張することは原理的に可能である。今後、波動場の多重散乱解との比較解析を行っていく計画である。火山フロントの背弧側で見られる強いS波のエンベロープ拡大(Obara and Sato, 1995)についても、このようなモデルからのアプローチが可能であろう。

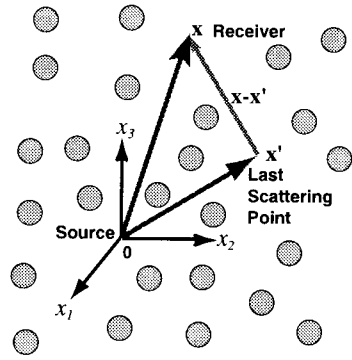


Fig. 1. Geometry of multiple scattering process.

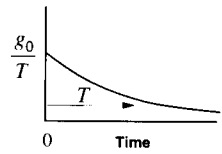


Fig. 2. Scattering response.

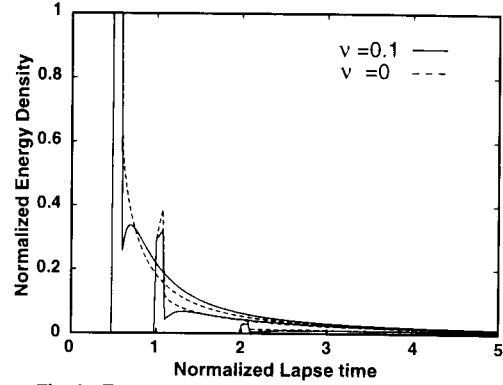


Fig. 3. Temporal traces of the normalized energy density for $v=0.1$ and 0 .

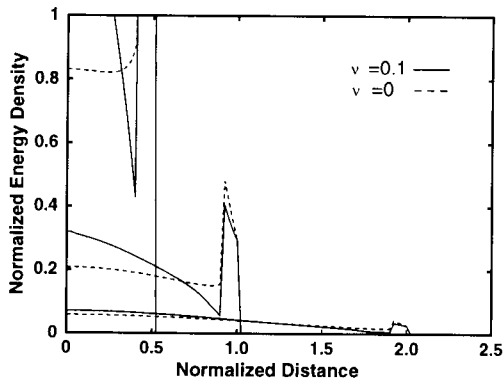


Fig. 4. Spatial distributions of the normalized energy density for $v=0.1$ and 0 .

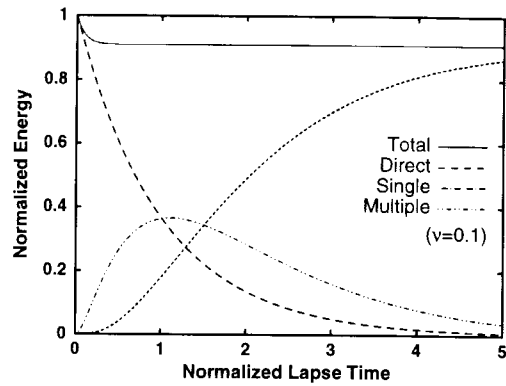


Fig. 5. Temporal traces of the normalized energy for $v=0.1$.