複雑系の解析の可能性 ― 高速多重極境界要素法 ―

福井大学工学部　　福井 卓雄

1　はじめに

高速多重極境界要素法は、N 体問題の解析に広く使われている高速多重極アルゴリズム [1, 2] を境界要素法に応用することによって、境界要素法による大規模解析を可能にしようとするものである。現在は通常のワークステーション上で数 10 万自由度程度の解析が可能となっている [3, 4, 5, 6]。高速多重極法の研究は現在も精力的に行なわれており、これらの研究成果を十分に生かすことができれば、近い将来には、数千万自由度の問題の境界要素解析も可能となろう。

このような大規模の境界要素解析が可能となると、従来の方法では困難であった、空洞・異質物・クラックなどを多数含む幾何学的に複雑な構造を持つ領域の解析が境界要素法を使って可能となってくる。とくに、このような複雑な場における波動の問題を効率的に解析する手法として有望であろう。

ここでは、高速多重極境界要素法についてその考え方を述べ、2 次元静弾性問題における解析例を紹介する。

2　境界要素法

2 次元静弾性問題を例として述べる。支配方程式は Navier の方程式

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{2}{\kappa-1}u_{j,ji}\right)=0 \tag{1}$$

である。ここに, u_i は変位。G はせん断弾性係数, κ は Poisson 比 ν により決まるパラメータで, 平面ひずみのとき$\kappa=3-4\nu$, 平面応力のとき $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ である。

Somigliana の公式より, 与えられた領域 B の内部で (1) を満足する変位とその境界値との間には積分関係

$$C_{ij}u_j(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})s_j(\boldsymbol{y})\,ds_y-\int_{\partial B}S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y})\,ds_y \tag{2}$$

がある。ここに, 境界が滑らかなとき, $C_{ij}(\boldsymbol{x})=\delta_{ij}\ \boldsymbol{x}\in B,\ (1/2)\delta_{ij}\ \boldsymbol{x}\in\partial B,\ 0\ \boldsymbol{x}\in\overline{B+\partial B}$ であり, $s_i=n_j\sigma_{ij}$ は境界上の応力ベクトルである。G_{ij} と S_{ij} は基本特異解と第二基本特異解であり,

$$G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi(\kappa+1)G}\left(\kappa\delta_{ij}\log\frac{1}{r}+r_{,i}r_{,j}-\frac{\kappa+1}{2}\delta_{ij}\right) \tag{3}$$

$$S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\frac{1}{r}\left[\left((\kappa-1)\delta_{ij}+4r_{,i}r_{,j}\right)n_kr_{,k}+(\kappa-1)(n_ir_{,j}-n_jr_{,i})\right] \tag{4}$$

である。ここに, $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ である。境界要素法は, (2) を境界値の拘束条件として, 与えられた境界条件に対して積分方程式を導き, これを離散化して数値的に解く方法である。

3　高速多重極法の導入

積分方程式 (2) を離散化して解く場合にもっとも大きな問題となるのは、生成される線形方程式が密行列の係数を持つことである。直接にこの計算を行なうと、記憶容量は $O(N^2)$, 計算量は $O(N^2)$~$O(N^3)$ となってしまう。これらの計算コストを大幅に軽減するための工夫が必要である。

まず、線形方程式を繰り返し解法で解くこととする。このために必要な計算は、離散化によって得られる行列と解ベクトルとの積であるが、この計算は (2) の右辺の積分を N 個の点について近似的に評価することと等

価である。右辺の積分は一種のポテンシャルであるから、この計算は N 個の境界要素に配布された密度による N 個の点のポテシャルを評価する計算となり、N 体問題で必要とされる計算とまったく同じである。高速多重極アルゴリズム [2] をそのままの形で導入することができる。これによって、記憶容量、計算量ともに $O(N)$ の程度となる。N 体問題と異なる点は、質点（あるいは点電荷）のかわりに要素上に分布した密度を扱うことと、問題に対応したポテンシャルの多重極展開が必要となることである。

2 次元静弾性問題の場合には、複素ポテンシャル ϕ, χ を用いて、複素変位

$$D = u_1 + iu_2 = \frac{1}{G}\left[\kappa\phi(z) - z\overline{\phi}'(\overline{z}) - \overline{\chi}'(\overline{z})\right] \tag{5}$$

を導入すれば、基本解に対する複素ポテンシャルは, 集中力 $P = P_1 + iP_2$ および $\nu = n_1 + in_2$ 方向の変位の食い違い $U = U_1 + iU_2$ に対して、

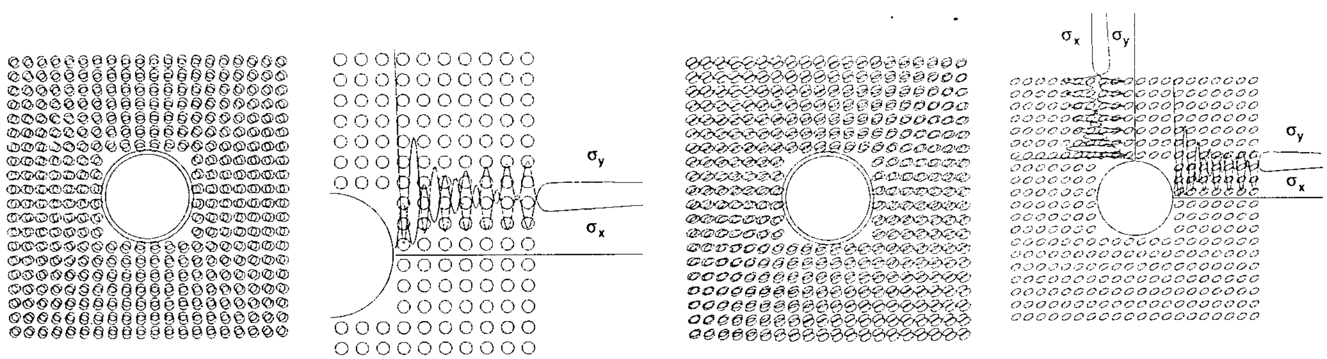
$$\phi_G(z) = -\frac{P}{4\pi(\kappa+1)}\log z, \quad \chi_G(z) = \frac{\kappa\overline{P}}{4\pi(\kappa+1)} z\log z \tag{6}$$

$$\phi_S(z) = \frac{GU\nu}{2\pi(\kappa+1)}\frac{1}{z}, \quad \chi_S(z) = -\frac{G(U\overline{\nu} + \overline{U}\nu)}{2\pi(\kappa+1)}\log z \tag{7}$$

であたえられる。これらの複素ポテンシャルは対数ポテシャルと同様に多重極展開することができるので、高速多重極アルゴリズムを容易に導入することができる [5]。

4　多数の空孔を有する領域の解析例

図に円孔および楕円孔がたくさんある中に空洞が存在する領域に等方応力を作用させた場合の解析例を示す。小さい孔は境界を 48 分割、大きい孔は 800 程度に分割している。総自由度は 3 万程度である。楕円孔の方では異方性の効果が現れているのが明らかである。



参考文献

[1] Barnes, J. and P. Hut : A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm, *Nature*, **324(4)**, pp. 446–449, 1986.

[2] Greengard, L.: A short cource on fast multipole methods, *Lecture Notes, VIIth EPSRC Numerical Analysis Summer School, Leicester University, U.K., 8th-19th July*, 1996.

[3] 福井卓雄, 服部純一：多重極展開法による境界要素解析の効率化, 計算工学講演会論文集, **1** pp. 319–322, 1996.

[4] 福井卓雄, 服部純一：高速多重極境界要素法における要素積分の評価法, BEM・テクノロジー・コンファレンス論文集, **6** pp. 51–56, 1996.

[5] 福井卓雄, 持田哲郎：高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13** pp. 131–136, 1996.

[6] 福井卓雄, 服部純一, 土居野優: 高速多重極法の境界要素解析への応用, 構造工学論文集, **43A**, 1997 (印刷中).