時間領域BIEMによる2D亀裂問題定式化で現れる発散積分の有限部分評価による統一的解釈

°亀　伸樹・山下輝夫（東大地震研）kame@eri.u-tokyo.ac.jp

Finite-part evaluation of hypersingular kernels appearing in BIEM analysis of 2D-crack problems -the equivalence of finite-part and regularizing evaluation-

Nobuki Kame and Teruo Yamashita
Earthquake Research Institute, University of Tokyo

1.はじめに

亀裂の破壊や亀裂による散乱という動的問題の解法に用いられてきた境界積分方程式法は、定式化の際に特異点を含む積分領域で積分微分の順序を交換するために積分核が超特異性を持ち発散積分が現れる。この発散積分の評価方法には二つの方法がある。破壊問題においては、この超特異積分の処理には何らかの方法（例えば部分積分）により積分核の特異性を除去する正規化法が用いられてきた。しかし、正規化法の式変形は一般に煩雑であり時には発見的であるという困難がある。一方、発散積分を有限部分の意味で直接評価する方法もあり、亀裂が伸展しない散乱の分野で主に用いられてきた。しかし、超特異積分の評価という意味では破壊問題と散乱問題は本質的に同じであり、破壊問題にも適用できるはずである。本講演では超関数理論で定義される発散積分の有限部分を考えることにより超特異積分が問題によらず全て（破壊・散乱、２次元・３次元、亀裂の形状・亀裂の幾何配置）直接的に評価でき、かつ、これが正規化法を内包する形で統一的な方法であることを示す。

2.発散積分の有限部分

超関数理論における有限部分は、一変数の場合

$$pf\int_0^c x^\alpha \varphi(x)\,dx = \int_{-\varepsilon}^{c} |x|^\alpha \varphi(x)\,H(x)\,dx\,,\ \alpha < -1 \quad (1)$$

のように定義される（今井1981参照；$H(x)$ はステップ関数）。超関数理論を用いれば特異領域を含む多重積分の場合にも有限部分を定義することができる。そこでは、一変数関数の場合と同じ手順をただ変数毎に繰り返すだけで発散多重積分の有限部分を評価できるようになる。

3.定式化

応力τ_{ij}と亀裂面上の滑り速度$\Delta\dot{u}_s$の間に成り立つ積分方程式は

$$\tau_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,u_{k,k} + \mu\,(\,u_{i,j} + u_{j,i}\,) \quad (2)$$

$$u_{i,j} = -\int_0^t d\tau \iint_\Gamma d\Gamma\,\Delta\dot{u}_s\,\nu_t\,c_{stpq}\,Gh_{ip,qj} \quad (3)$$

となる（$\mu,\lambda,\nu t,cstpq$ は定数）。ここで区間要素内滑り速度一定で離散化すると超特異性をもつ積分核としてグリーン関数の空間２階微分時間１階積分関数（ステップレスポンスの空間２階微分）$Gh_{ip,qj}$ がでてくる。この核を式(1)を繰り返し適用し

有限部分を取れば良い。

4.正規化法との等価性

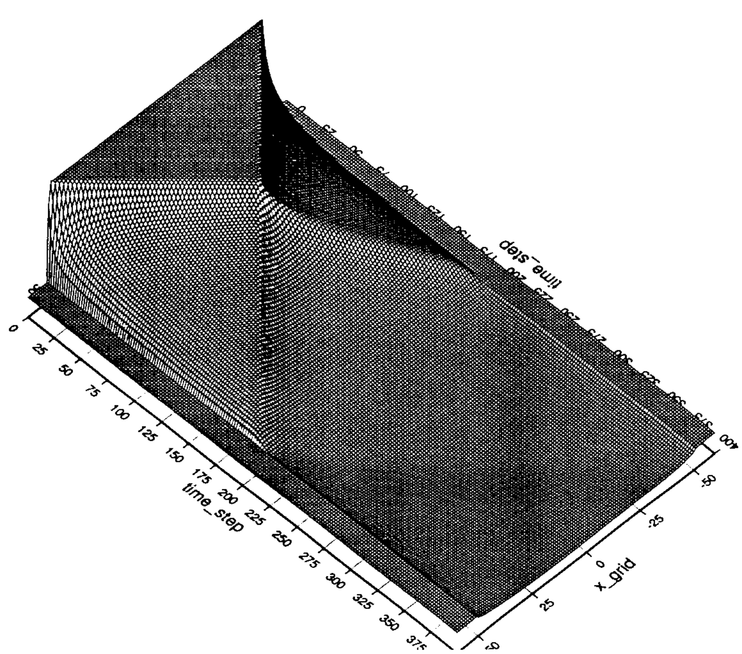
形式的に時間変数で部分積分を２階行った表現定理を利用して今度は滑り加速度$\Delta\ddot{u}_s$を超関数とみなした場合、積分核$Gr_{ip,qj}$（ランプレスポンスの空間２階微分）はもはや積分可能な特異性しかもたない。

$$u_{i,j} = -\int_0^t d\tau \iint_\Gamma d\Gamma\, \Delta\ddot{u}_s\, \nu_t\, c_{stpq}\, Gr_{ip,qj} \qquad (4)$$

滑り速度が区間要素内で一定として離散化する限り(3)の有限部分と(4)は同値であるので、問題により簡単な方を選択すればよい。従来の正規化法は、(4)とは異なる方法で積分可能な核の表現をみつけてきたが、最終的な離散核の表現は解析的に一致する。従来の正規化法と異なり、(3)や(4)の方法は滑り速度関数の時間微分のみを用い空間微分を用いないため、亀裂の形状毎に正規化核の表現を見つける必要がない容易さを供えている。

5.数値計算例

SH平面孤立亀裂は人工粘性なしでも数値計算が安定であるが（図１）、P-SV亀裂の場合は人工粘性なしでは数値計算が不安定（図２）になる。これは放射パターンの違いによる。亀裂群の間で多重散乱する場合はSHでも人工粘性項が必要になる。



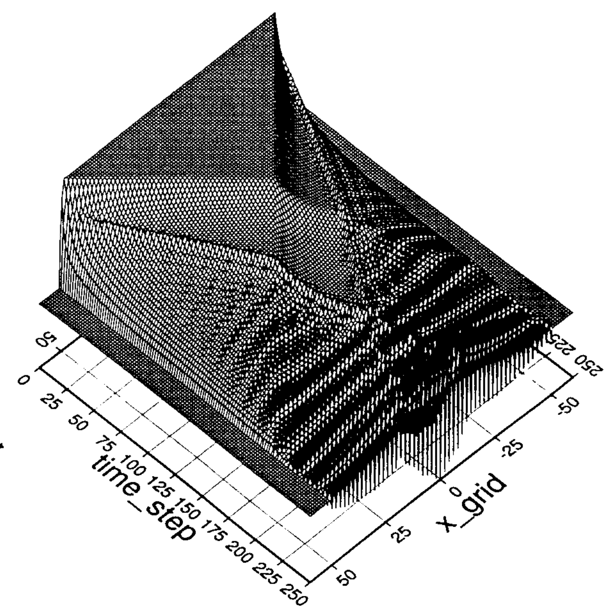


図１：突然応力降下したSH亀裂面上の滑り速度の時空間分布　　図２：同P-SV亀裂の場合