S18-P02

空間領域フィルタによるランダム不均質媒質の作成

江本賢太郎 （東北大），前田拓人（弘前大）

はじめに

ランダムな微細不均質が波動場に与える影響は理論的・数値的に調べられてきた．一般的に理論モデルは一様無限なランダム不均質を仮定している場合が多く，理論モデルの検証や散乱波動場の基本的性質を知るためには，巨大なランダム不均質媒質における数値シミュレーションを行う必要がある．また実構造を用いた数値シミュレーションにおいても，地殻やスラブではランダム不均質が取り入れられることがある．一般的にランダム不均質媒質は，ゆらぎのパワースペクトル密度（PSDF）にランダム位相を与え，その逆フーリエ変換により作成される．巨大な媒質サイズの場合，メモリ容量の都合で並列化して作成する必要があるが，FFT だと並列化効率が悪く，スーパーコンピュータ上での作成が困難である．そこで，周期境界条件になっている小さな媒質を繰り返し並べたり，なめらかにつなぎ合わせることで 1 つの巨大な媒質を再現する方法が行われてきた [Emoto & Sato, 2018]．本研究では，従来の FFT を用いて周波数領域の PSDF から作成する方法とは異なり，ホワイトノイズに空間領域でフィルタを適用することで，任意の PSDF を再現するランダム不均質媒質を作成する方法を検証する．漸化式フィルタであれば，FFT と異なり並列化効率を高めることができると期待される．

空間領域フィルタ

まず，1 次元のガウス型ランダム媒質の作成方法について述べる．ランダムにゆらぐ速度は $V(x) = V_0(1+\xi(x))$ とかける．ここで，V_0 は平均速度，ξ はランダムゆらぎであり，PSDF（$P(m)$），ランダム位相（$\phi(m)$）を用いて

$$\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{P(m)}e^{i\phi(m)}e^{imx}dm \tag{1}$$

と表される．従来の作成方法では，FFT を用いてこの式を評価していた．

空間領域フィルタには FIR（有限インパルス応答）と IIR（無限インパルス応答）がある．IIR は FIR と比べて計算量が少ないが，安定性に気をつけて設計する必要がある．本研究では両方の手法を試す．

FIR フィルタ

1 次元ガウス型の場合，特徴的スケール（a），ゆらぎの RMS 値（ε）を用いて

$$\sqrt{P(m)} = \varepsilon\pi^{1/4}\sqrt{a}e^{-a^2m^2/8} \tag{2}$$

であるため，フィルタ係数は

$$h(x) = \varepsilon\pi^{-1/4}\sqrt{2/a}e^{-2x^2/a^2} \tag{3}$$

となる．ホワイトノイズにこのフィルタ係数を畳み込むことでガウス型ランダム媒質を作成する．特徴的スケールが大きくなればフィルタ係数の幅は広くなり，特に特徴的スケールに比べて空間刻みが小さい場合には，計算量が多くなる．

IIR フィルタ

対称なフィルタにするため，causal と anti-causal のフィルタをかける．本研究は van Vliet et al. (1998) に習い，両者を掛け合わせる表現を用いる．causal（H^+）と anti-causal（H^-）の伝達関数は

$$H^+(z) = \prod_{i=1}^{N} \frac{d_i - 1}{d_i - z^{-1}}, \qquad H^-(z) = (-1)^N \prod_{i=1}^{N} \frac{d_i - 1}{z - d_i} \tag{4}$$

である．ここで，極 d_i^{-1} は単位円の内側に存在し，N はフィルタの次数である（本研究では $N = 5$ とする）．d_i は伝達関数 $H(m) = H^+(z) \cdot H^-(z)|_{z=e^{im\Delta x}}$ が，(2) の指数関数部分と一致するように最小二乗法で求める．実装する際には，桁落ちを防ぐため，伝達関数は因数分解して，1 次フィルタを N（次数）×2（方向）回適用する．

n 次元 von Kármán 型ランダム媒質

FFT に基づく従来の作成方法では，2 次元や 3 次元媒質の場合はそれぞれの方向に 1 次元 FFT をすればよい．しかし，空間領域フィルタの場合には，伝達関数がそれぞれの方向に変数分離可能である場合にのみ，それぞれの方向に 1 次元フィルタを適用することが可能である．つまり，von Kármán 型の場合にはこのようには作成できない．そこで，ガウス型媒質の重ね合わせにより，von Kármán 型を作成する．von Kármán 型媒質の PSDF（P_{vK}）は，ガウス型（P_{G}）を用いて

$$P_{\mathrm{vK}}(m; a, \varepsilon, \kappa) = \frac{1}{2^{2\kappa-1} a\Gamma(\kappa)} \int_0^\infty \left(\frac{a'}{a}\right)^{2\kappa-1} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] P_{\mathrm{G}}(m; a', \varepsilon) da' \tag{5}$$

と書くことができる．この表現は次元によらない．これを用いると von Kármán 型ゆらぎ（ξ_{vK}）は，ガウス型（ξ_{G}）を用いて

$$\xi_{\mathrm{vK}}(x; a, \varepsilon, \kappa) = \int_0^\infty c(a'; a, \kappa) \xi_{\mathrm{G}}(x; a', \varepsilon) da' \tag{6}$$

と表現でき，積分内の係数は

$$c(a'; a, \kappa) = \frac{2^{1/4 - 3\kappa/2}}{a\Gamma(\kappa/2 + 3/4)} \sqrt{\frac{\Gamma(\kappa + 3/2)}{\Gamma(\kappa)}} \left(\frac{a'}{a}\right)^{\kappa-1} \exp\left[-\frac{1}{8}\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right] \tag{7}$$

である．この係数は a' とともに単調減少であるため，実際の計算では適当なところで打ち切れば良いが，$\kappa < 1$ のとき $a' = 0$ で発散する．特に κ が小さい時に $a' = 0$ 付近の重みが大きく，積分の下限を空間刻みとしてしまうと，PSDF の高波数成分を過小評価してしまう（図 1a）．そこで，積分を $[0, b(= \Delta x)]$ とそれ以外の部分に分けて計算する．

$$\begin{aligned} \xi_{\mathrm{vK}}(x; a, \varepsilon, \kappa) &= \int_0^b c(a'; a, \kappa) \xi_{\mathrm{G}}(x; a', \varepsilon) da' + \int_b^\infty c(a'; a, \kappa) \xi_{\mathrm{G}}(x; a', \varepsilon) da' \\ &= \alpha \xi_{\mathrm{G}}(x; a' = 0, \varepsilon) \int_0^b c(a'; a, \kappa) da' + + \int_b^\infty c(a'; a, \kappa) \xi_{\mathrm{G}}(x; a', \varepsilon) da' \\ &\simeq \alpha \frac{2^{1/4} - 3\kappa/2}{\kappa\Gamma(3/4 + \kappa/2)} \left(\frac{b}{a}\right)^\kappa \sqrt{\frac{\Gamma(\kappa + 3/2)}{\Gamma(\kappa)}} \xi_{\mathrm{G}}(x; a' = 0, \varepsilon) + \int_b^\infty c(a'; a, \kappa) \xi_{\mathrm{G}}(x; a', \varepsilon) da' \end{aligned} \tag{8}$$

$\xi_{\mathrm{G}}(x; a' = 0, \varepsilon)$ はホワイトノイズであり，α はホワイトノイズの重みを調整する任意のパラメータである．図 1b に $\alpha = 0.1$ の場合を示す．PSDF の高波数部分が持ち上がり，理論値をよく再現できていることがわかる．

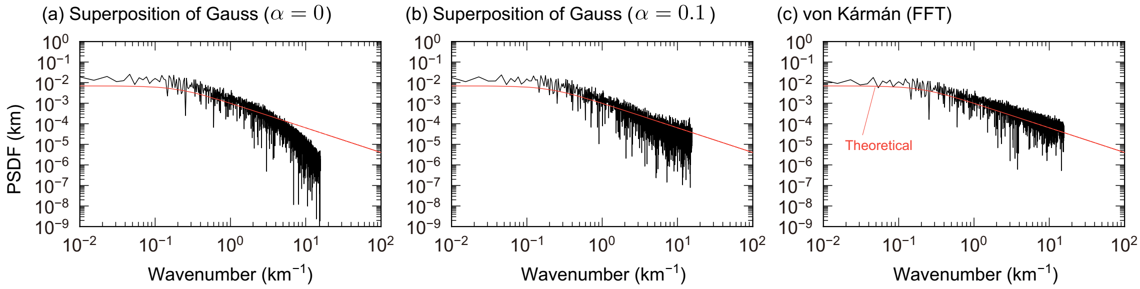

図 1　ガウス型の重ね合わせによる von Kármán 型ランダム媒質と，von Kármán 型の PSDF から直接作成した媒質の PSDF の比較．$a = 5\,\mathrm{km}$, $\varepsilon = 0.05$．(8) におけるホワイトノイズの重み α は (a) 0，(b) 0.1 とした．

2 次元差分法シミュレーション

異なる方法で作成したランダム不均質媒質が波動場に与える影響を調べるため，スカラー波の 2 次元差分法シミュレーションを行う．

仮定する媒質は，ガウス型で $a = 5\,\mathrm{km}$, $\varepsilon = 0.05$ である．グリッド数は 2048^2 とし，空間刻み $\Delta x = 0.2\,\mathrm{km}$，時間刻みは $0.08\,\mathrm{s}$ とする．媒質の中心から等方的に放射する Ricker 波の中心周波数は $1\,\mathrm{Hz}$ とし，差分計算の精度は空間 4 次・時間 2 次とする．FIR・IIR フィルタで作成した媒質と，従来の FFT を用いて作成した媒質，グリッド数 256^2 の小ランダム媒質を 8×8 個並べた媒質（繰り返しランダム媒質）を比較する．図 2 にそれぞれの手法で作成したランダム媒質と，その自己相関関数（ACF）と PSDF を示す．空間領域フィルタ（FIR・ IIR）で作成した媒質の PSDF は従来の FFT によるものと同程度に理論曲線を再現できていることがわかる．一方，繰り返しランダム媒質は，ACF に周期的や PSDF に周期的なピークが現れている．

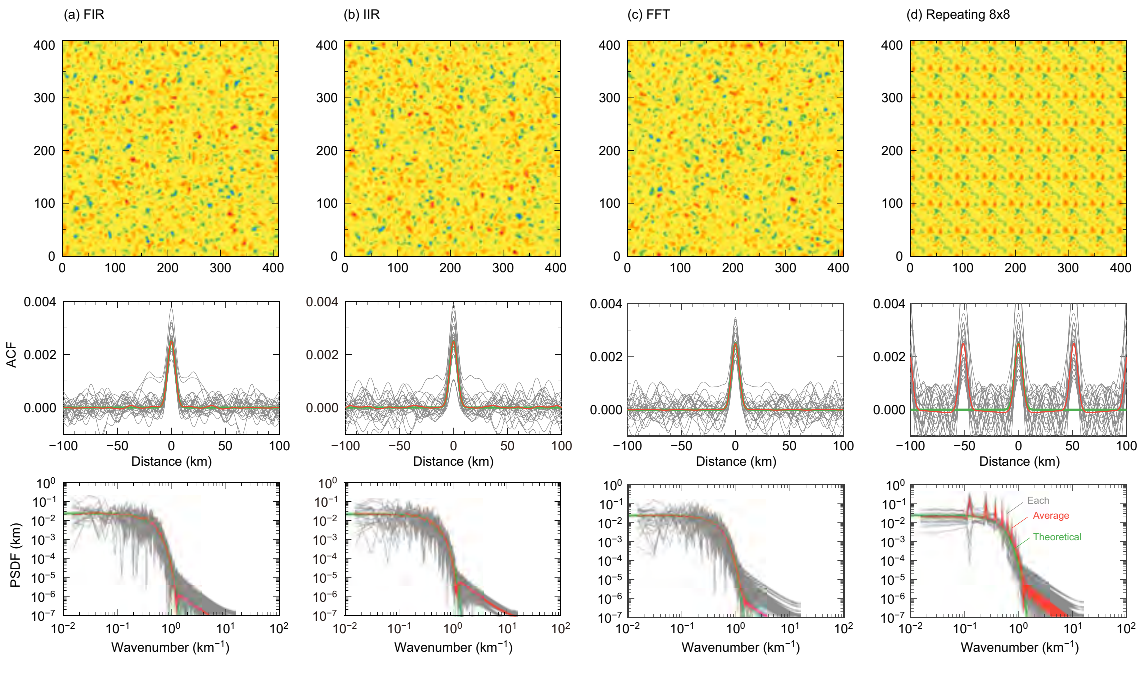

図 2　FIR・IIR フィルタ，FFT により作成したガウス型ランダム媒質と繰り返しランダム媒質の ACF と PSDF の比較．$a = 5\,\mathrm{km}$, $\varepsilon = 0.05$．2 次元媒質の各方向に 1 次元 ACF を計算し，それをフーリエ変換して PSDF を計算した．

25 km から 150 km までの各伝播距離において，方位角 45 度おきに計 8 個の観測点を設置し，シードを変え

た 30 個のランダム媒質での結果をスタックした平均二乗エンベロープを図 3 に示す．空間領域フィルタは従来の FFT に基づく場合と，ピーク値やコーダレベルが一致した．繰り返しランダム媒質の場合は，コーダレベルは一致するものの，ピーク振幅の到達が遅れ，増幅されている．図は示さないものの，von Kármán 型ランダム媒質の場合でも同様の傾向であった．しかし，(8) における α を適切に設定しないと，空間領域フィルタによる媒質では，PSDF の高波数側の振幅が落ち込み，コーダレベルが低くなる場合が確認された．

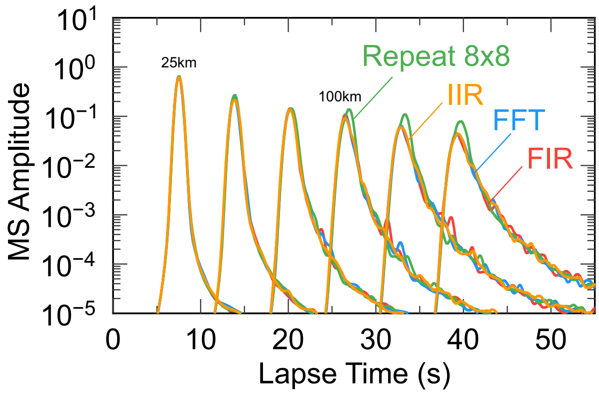

図 3　それぞれの媒質での平均二乗エンベロープの比較．

まとめ

これまでランダム媒質は，PSDF にランダム位相を与え，それをフーリエ変換することで作成されてきたが，本研究では，ホワイトノイズに空間領域フィルタを適用することで作成した．FIR・IIR フィルタのどちらでも理論 PSDF をよく再現するランダム媒質の作成ができた．von Kármán 型ランダム媒質は，ガウス型の重ね合わせによって表現することで，各方向に 1 次元フィルタを行えば，多次元ランダム媒質を作成することが可能である．この際，空間刻みに対してゆらぎの特徴的スケールが大きい場合のガウス型媒質を作成することになり，FIR だと計算量が増えるため，IIR の方が望ましい．2 次元差分法シミュレーションで，各手法による媒質におけるエンベロープを比較した．空間領域フィルタと従来の FFT を用いた媒質では，エンベロープ全体として違いはなかったが，小さい媒質を繰り返して並べて大きなランダム媒質を再現する場合では，ピークが増幅し，その到達時刻が遅れることがわかった．今後，並列化して作成するコードを作成し，3 次元で効率よくランダム不均質媒質を実現させる予定である．