時間領域フィルタによる波形相互相関の推定法の改善　　S17-P01

蓬田 清（北大・理）

Estimation of waveform cross-correlations: Improvement with time-domain filters

Kiyoshi YOMOGIDA (Graduate School of Science, Hokkaido University)

複数の地震波形記録（または合成波形）を比較し、その相関や誤差の定量化は、地震学のあらゆる分野で行われる。その際に、時間領域での差を直接用いると、波形の凹凸の性質（位相の2πの周期性）より、曖昧な判定になる場合が多い（Warner & Guasch, 2016）。また、短い記録長のデータの場合、フーリエ変換による解析では両端の切断（または離散化による繰り返し）から推定精度の劣化が生じる。このような任意性や劣化に対して、２つの波形 $f(t), d(t)$の差を係数M個のWienerフィルタ$w(t)$を介した形で表現する解析が有効である（*は畳み込み、データ数がN, データ間隔がΔt）(e.g., Robinson & Treitel, 1980)：

$$\min.\ \sigma^2(M) \equiv \sum_{i=0}^{N-1}\left(f(t_i) * w(t_i) - d(t_i)\right)^2 \Delta t$$

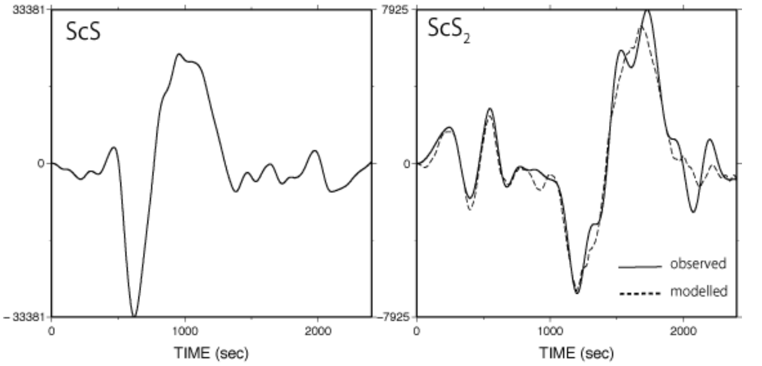
しかし、このような自己回帰モデルに基づく解析では、（１）フィルタの係数Mを増やすほど誤差が自動的に小さくなる、（２）数値的な桁落ちにより最小二乗法で一般的に見られるデータ点間の区間で振動する成分が混入する、といった問題がある。（２）では、対角成分に小さな値を加えて安定化させ、その割合の振幅を持つwhite noiseがデータに加わったと考える。（１）については、maximum entropy法でも導入される、AICを最小にする係数Mを最適と考えて、誤差とパラメタ数のtrade-offを客観的に評価すれば良い：

$$\mathrm{AIC} \equiv N\log\left(2\pi\sigma^2(M)\right) + N + 2M$$

また、求めるフィルタ$w(t)$は $t = 0,,(N-1)\Delta t$ としているので、入力波形 $f(t)$ に比べて出力波形が十分に遅延していない場合、得られるフィルタが$t = 0$側に偏ってしまう。$w(t)$の両端の時間の有限性の影響がないように、適当な遅延を入れる必要がある。

一例として、2015年5月30日に小笠原諸島西方沖での深さ680kmのM7.9深発地震におけるF-netの富士川（FUJ）観測点での核・マントル境界面からのScS多重反射波を取り上げる（右図）。Transverse成分での２つの波形（ScS→ScS_2）の比較より、マントルの平均的走時・減衰の分散性が推定できるが、短いパルス状の波形なので通常のスペクトル解析では分散性が詳しく求められない。Wienerフィルタを用いると、図の破線で示す予測される２つの波形の相関を得ることができた。

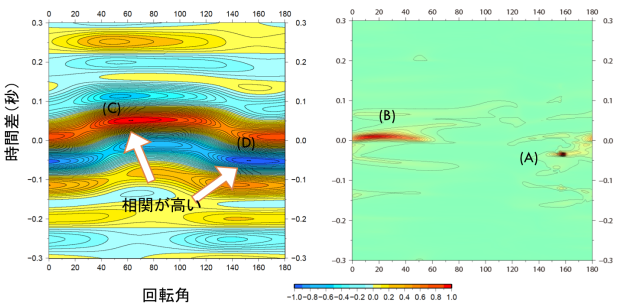
ただし、この例ではフィルタの幅がパルス幅以上、すなわちデータ長Nに近いフィルタ係数Mが必要である。これに対して、有理関数の形式でフィルタを表現すると、少ない係数で良い近似を与えることが知られ、Padé approximatsと呼ばれる（e.g., Bender & Orszag, 1978）。Wienerフィルタが FIRフィルタの形式となっているのに対して、IIRフィルタに対応する。z-変換（$z \equiv \exp(i\omega\Delta t)$とする）でのフィルタは以下の ($M_1$+$M_2$+1)個の係数 a_n, b_nで表され、時間領域では次の漸化式の形式で、２つの波形の線形結合の表現となる：

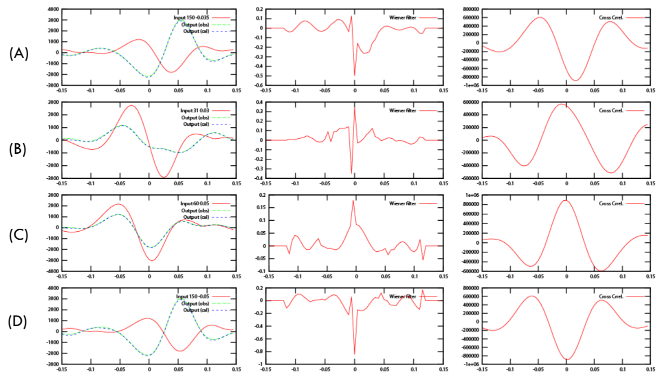


$$P(z)=\frac{\sum_{n=0}^{M_2} b_n z^n}{1+\sum_{n=1}^{M_1} a_n z^n} \rightarrow \sum_{n=0}^{M_2} f_{i-n} b_n = d_i + \sum_{n=1}^{M_1} d_{i-n} a_n \quad (i=0,\cdots,N-1)$$

Wienerフィルタと同様に、両辺の差の二乗を最小とする係数a_n, b_nを求めればよく、大まかな周波数特性が安定して推定できる利点がある。あるいは、先と同じWienerフィルタ$w(t)$をまず求め、その係数からより少数の係数a_n, b_nを系統的に求めることもできる（e.g., Bender & Orszag, 1978）。

もう一つの地震学で広く用いられる波形記録の比較は、相互相関である。時間をずらしながら、相互相関係数の最大値を求めるが、これも波形の特徴である2πの周期性により、幾つもの極大値が生じる。左下図は箱根火山下を通る地震波形の水平２成分のS波スプリッティングの解析例である。回転角と時間差を未知パラメタとして通常の相関係数の値をプロットしたものが左、２波形のwienerフィルタ$w(t)$をそれぞれ求め、一致の程度をデルタ関数（インパルス応答）からのズレ$\sum_{i=0}^{N-1}(t_i w(t_i))^2 / \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i)^2$を右に示す。それぞれ直交する２つのピークが求まり、これが伝搬中の異方性の向きと大きさを与えるが、相関係数はいくつもの極大値があるが、wienerフィルタでのピークは非常に明瞭で客観的な推定に優れている。





ただし、２つの解析は微妙に異なるパラメタ値となった。右上図には相関係数より求まるCとD、$w(t)$より求まるAとBのそれぞれに対応する、観測波形（赤・緑・青が入力成分、出力成分、$w(t)$からの予測波形）と得られたフィルタ$w(t)$と相互相関を示す。対応する$w(t)$は確かにどれもインパルス応答に近く、入力と出力の関係を適切に表現している。通常の相関係数が最大のCとDでは$w(t)$が時間領域でほぼ対称だが、これは波形をある時間だけずらす直線位相に対応する。一方、$w(t)$の時間軸上での広がりを最小として求めたAとBはより鋭いインパルス状だが、時間対称ではなく位相がずれている。時間シフトの直線位相である対称なフィルタを求めるならば、時間反転したフィルタ$w(t)$との積$\sum_{i=0}^{N-1} t_i w(t_i) t_i w(-t_i) \ / \sum_{i=0}^{N-1} w(t_i) w(-t_i)$　が最小になる基準とすれば、従来の相互相関と一致することとなる。ただし、「時間をずらすと２つの波形が一致する」モデルは、S波スプリッティングに対してはある周波数帯域のみに正しく、異方性のメカニズムに起因する周波数依存性が実際にあり、本研究で求められる$w(t)$の位相情報は、その解明のために今後新たに重要となる可能性がある。

＜謝辞＞　神奈川温泉地学研究所の本多亮氏からは、箱根火山地域でのS波スプリッティングについての波形解析の一部を引用させていただいた。

＜引用文献＞
・Bender & Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, 1978.
・Robinson & Treitel, *Geophysical Signal Processing*, Prentice-Hall, 1980.
・Warner & Guasch, *Geophys.*, **81**, R429-R445, 2016.