

べき乗型スペクトルを持つ 2 次元ランダム媒質 におけるスカラー平面波のエンベロープ

富山祐司・河原純（茨城大）・江本賢太郎（東北大）

はじめに

地下のランダムな不均質構造は短周期地震波を散乱させ、地震波のエンベロープ拡大やピーク遅延などの現象を引き起こす。これらの現象を説明するために、これまでいくつかのモデルが提唱されてきた。代表例として輻射伝達理論やマルコフ近似理論などが挙げられる (Sato et al., 2012)。近年、Sato (2016) は、地震波速度の空間的揺らぎがべき乗型スペクトルを持つフォンカルマン型 3 次元ランダム媒質について、点震源から放射されるスカラー波のエンベロープを記述する新しいモデル (以下、改良マルコフ近似理論) を提案した。このモデルでは、入射波の中心波数を基準として、媒質の不均質を長波長成分と短波長成分に分割する。そして、長波長成分による多重前方散乱がエンベロープ拡大を、短波長成分による広角散乱が散乱減衰をそれぞれ規定すると考え、前者にマルコフ近似、後者にボルン近似を適用することにより、エンベロープを解析的に導出した。同理論はその後、Sato and Fehler (2016) によって 2 次元円筒波の場合に、江本・佐藤 (2016b) によって 3 次元平面波の場合に拡張された。Sato and Fehler (2016) と江本・佐藤 (2016a, b) は、差分法シミュレーションによって数値的にエンベロープを求め、コーダ部分を除いて改良マルコフ近似理論の解と概ね調和的な結果を得た。

本研究では、改良マルコフ近似理論を 2 次元スカラー平面波の場合に拡張し、Sato and Fehler (2016) らと同様に、差分計算による検証を行う。

改良マルコフ近似理論による 2 次元平面波のエンベロープ

地震波速度揺らぎが、以下のフォンカルマン型 2 次元パワースペクトル密度関数を持つと仮定する。

$$P(\mathbf{m}) = \frac{4\pi\kappa\varepsilon^2 a^2}{(1+a^2 m^2)^{\kappa+1}}, \quad m = |\mathbf{m}| \quad (1)$$

ここで \mathbf{m} は波数ベクトル、 ε は平均速度 V_0 に対する相対的な速度揺らぎの RMS 値、 a^{-1} はスペクトルのコーナー波数である。次数 κ はスペクトルの高周波側の勾配を規定する。入射波の中心波数を $k_c = \omega_c/V_0$ ($\gg a^{-1}$) とするとき、パラメータ ζ (~ 1) を導入して、次式のようにスペクトルを長周期成分 $P_L(\mathbf{m})$ と短周期成分 $P_S(\mathbf{m})$ に分割する。

$$P_S(\mathbf{m}) = \frac{4\pi\kappa\varepsilon^2 a^2}{\left[(\zeta a k_c)^2 + a^2 m^2 \right]^{\kappa+1}}, \quad P_L(\mathbf{m}) = P(\mathbf{m}) - P_S(\mathbf{m}) \quad (2)$$

ここで $P_S(\mathbf{m})$ はそれ自身がフォンカルマン型であり、コーナー波数は $a_S^{-1} = \zeta k_c$ ($\gg a^{-1}$)、速度揺らぎの RMS 値は $(a_S/a)^\kappa \varepsilon$ である。 $P_L(\mathbf{m})$ に対してマルコフ近似理論を適用すると、単位平面パルス波の入力に対する MS エンベロープの解析解が次式のように導かれる。

$$I_{MA}^{Plane}(r, t; \omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d \hat{w}(r, \omega_d) \frac{1}{\sqrt{\cos 2e^{i\pi/4} \sqrt{t_M \omega_d}}} \quad (3)$$

ここで $\hat{w}(r, t; \omega_c)$ は走時揺らぎによる減衰 (wandering effect) を表す項、 t_M はエンベロープ拡大を規定

する特徴的時間であり、Sato (2016)や Sato and Fehler (2016)で与えられているものと同じである。一方、 $P_S(\mathbf{m})$ にボルン近似を適用して得られる全散乱係数 $g_{SO}(\kappa, \zeta, k_c)$ は、Sato and Fehler (2016)の(25)式で計算可能である。以上より、改良マルコフ近似理論による2次元スカラー平面波のMSエンベロープ(以下、理論エンベロープ)は次式で与えられる($s(t)$ は入射波のエンベロープ)。

$$I^{Plane}(r, t; \omega_c, \kappa, \zeta) = s(t) * I_{MA}^{Plane}(r, t; \omega_c, \kappa, \zeta) e^{-g_{SO}(\kappa, \zeta, k_c) V_0 t} \quad (4)$$

差分法シミュレーション

空間4次・時間2次精度の2次元差分法を用いて波動シミュレーションを行う。格子間隔は方向によらず30 m, 計算時間間隔は2 msとする。矩形領域(x 方向122 km, z 方向225 km)の内部に、疑似乱数を用いて次数 κ のフォンカルマン型速度揺らぎ($V_0 = 4$ km/s, $a = 5$ km, $\varepsilon = 5\%$)を15通り作成する。この領域の一端($z=0$)に、外部から平面リッカー波を入射させ、領域内には x 方向に15 km 間隔で7点、 z 方向に25 km 間隔で8点の観測点(計56点)を配置する。計算領域の x 方向の端には周期境界条件を、 z 方向の端には吸収境界条件をそれぞれ課す。15通りのシミュレーションのそれぞれにおいて、同一伝播距離にある7観測点で得られた計105個の自乗振幅波形を平均したものを、以下では差分エンベロープと呼ぶ。以上の作業を、 $\kappa = 0.1, 0.5, 1.0$, $\zeta = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5$, およびリッカー波の中心周波数 $f_c = 1, 2, 4$ Hz に対して繰り返す。

結果

理論エンベロープと差分エンベロープの比較の例として、 $\kappa = 0.5$, $\zeta = 1.0$, $f_c = 2$ Hz の場合を図1に示す。図2は、図1の結果の後半部分において、 ζ を0.25~1.5の範囲で変化させたものである。得られた結果の全体的傾向は以下の通りである。(1) $\zeta = 1.0$ の場合、両エンベロープはコーダ部分を除いて大まかには調和的だが、 κ が大きく(揺らぎの短波長成分が乏しく)、 f_c が高い(入射波の中心波長が短い)ほど両者の合致度が高い傾向が見られた。(2)特に $\kappa = 0.1$ では、検討した全ての f_c 値に対して、エンベロープの初動~ピーク付近に明瞭な不一致が見られた。類似の結果は江本・佐藤(2016b)によっても得られており、理論の限界を反映している可能性がある。(3) $\kappa = 0.5$ の場合、理論と差分のエンベロープが概ね調和的である ζ 値の範囲は、 f_c によらず0.75~1.5程度であった。 $\kappa = 1.0$ の場合、同様な ζ 値の範囲は0.5~1.5程度に広がった。これらはSato and Fehler (2016)の結果と調和的である。

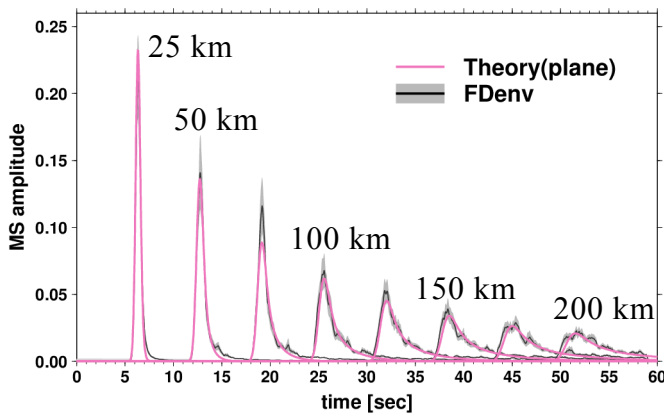


図1. 理論エンベロープ(紫線)と差分エンベロープ(黒線)の比較($\kappa = 0.5$, $\zeta = 1.0$, $f_c = 2$ Hz)。灰色の帯は標準誤差の範囲を表す。図中の数字は不均質領域内の伝播距離。

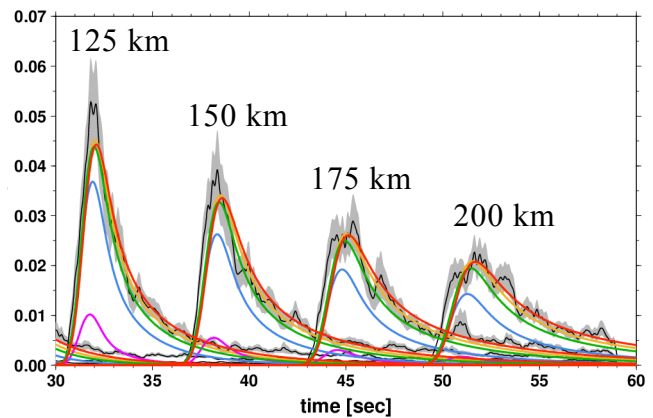


図2. 左図の後半部分において、理論エンベロープに関する ζ 値を以下のように変化させたもの。 $\zeta = 0.25$ (紫), 0.5 (青), 0.75 (緑), 1.0 (橙), 1.5 (赤)。