3 次元差分法シミュレーションを用いた 2 乗振幅のアンサンブル平均とばらつきの検討

江本賢太郎・佐藤春夫 （東北大）

はじめに

短周期地震波に強い影響を与える微細不均質構造は，ランダムな速度ゆらぎとしてモデル化される．その中を伝播する波のエンベロープやコーダの解析から，ランダム微細不均質を統計的に特徴づける相関距離やゆらぎの強さの推定が行われてきた．観測される短周期地震波を解析する際に，ランダム不均質媒質中を伝播する地震波のアンサンブル平均を記述する理論モデルが用いられる．理論モデルにおけるアンサンブル平均とは，ランダムゆらぎの配置が異なる媒質の集合を用意し，個々の媒質での波動伝播の結果を平均したものである．しかし，地球は 1 つであり，観測される地震波は 1 つの実現値であるため，理論と観測を比較する際にはギャップが存在する．そのため，理論モデルのばらつきを考え，解析結果の誤差を見積もることが重要である．本研究では，3 次元差分法を用いてランダム媒質中のスカラー波の伝播を計算し，そのアンサンブル平均と分布関数やばらつきを調べる．

振幅の分布

直達波の振幅は対数正規分布になることが知られている [Rytov et al., 1989]．これは，波動場の位相（複素数）が経路に沿った和の形で記述でき，中心極限定理により，この位相が正規分布となる．したがって，波動場の振幅は対数正規分布となる．2 乗振幅もまた対数正規分布となる．また，RMS エンベロープを波動場とそのヒルベルト変換それぞれの 2 乗和の平方根で記述すると，コーダ部分では波動場がガウシアンノイズになると考えれば，RMS エンベロープは Rayleigh 分布となる．したがって，MS エンベロープは指数分布となる．これは，Takahara & Yomogida (1992) や Nakahara & Carcole (2010) らにより，観測結果からも支持されている．

波形計算

地球シミュレータを用いた 3 次元差分法シミュレーションを行う．差分化の精度は，空間 4 次，時間 2 次とし，媒質サイズは x, y, z 方向に，1024×1024×3200 グリッド，空間刻みは全方向に 80 m，時間刻みは 6 ms とする．z 方向の範囲は，-30 km< z <226 km とし，$z < 0$ は均質媒質，$z \geq 0$ をランダム不均質媒質とする．$z < 0$ から平面波（xy 平面）が，z の正の方向へ入射する状況を考える．ランダム不均質媒質は von Karman 型自己相関関数で特徴づけられるとする．相関距離 $a = 5\,\mathrm{km}$，ゆらぎの RMS 値 $\varepsilon = 0.05$，平均速度 $v_0 = 4\,\mathrm{km/s}$ を固定し，$\kappa = 0.1, 0.5, 1.0$ の場合を考える．入射平面波は，中心周波数が 1.5 Hz の Ricker Wavelet とする．この場合，$ak_0 = 11.8$ である．x, y 方向は周期境界条件，z 方向は吸収境界条件 [Cerjan, 1985] とする．経過時間 70 秒まで計算するために必要な計算時間は，50 ノードを用いた MPI 並列計算 [e.g. Furumura & Chen, 2004] で約 8 分である．$z = 25\,\mathrm{km}$ から 200 km まで，25 km 間隔で観測点を配置する．それぞれの伝播距離において xy 平面上に 10 km 程度離して合計 64 個の観測点を設置する．相関距離を 5 km と仮定してあるため，それぞれの観測点は統計的に独立なものとして扱う．

分布関数の推定

2 乗振幅の分布関数の例として，$\kappa = 0.5$，伝播距離 100 km において，立ち上がり付近とコーダ部分の 2 乗振幅のヒストグラムを図 1 に示す．見やすくするために，2 乗振幅の対数を用いている．対数正規分布と指数分布を合わせてみると，立ち上がり付近は左右対称な対数正規分布の方がよく合うものの，コーダ部分は指数分布によく合う様子がわかる．ここで，分布の当てはまり具合を定量的に評価する指標として，換算 χ^2 値を

計算する

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{1}{d}\sum_i^N \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}. \tag{1}$$

ここで，O_i は観測（計算）値から求めた頻度であり，E_i は分布関数モデルから予測される頻度である．また，d は自由度を表している．$\tilde{\chi}^2$ 値が小さいほど，その分布関数でよく説明できることを表す．図 2 に，対数正規分布と指数分布の $\tilde{\chi}^2$ 値が経過時間とともにどう変化するかを示す．ある時刻で，対数正規分布から指数分布へ徐々に移り変わる様子が見れる．伝播距離が大きいほど，早い経過時間から指数分布に従うようになり，伝播距離 200 km においては，エンベロープのピーク値付近も指数分布に従うことがわかる．また，図には示さないが，κ が小さい（短波長のスペクトルが大きい）ほど早い時間から指数分布に従うことが分かった．つまり，ゆらぎの短波長成分が多いほど，波形はランダムな散乱波によって構成されていると考えられる．

結論

ランダム不均質媒質に平面波が入射したときの 2 乗振幅の振る舞いを，3 次元差分法シミュレーションにより調べた．直達付近とコーダ部分で 2 乗振幅の分布を調べたところ，直達付近は対数正規分布，コーダ部分は指数分布に従うことが分かった．経過時間と共に分布関数が徐々に変化し，対数正規から指数分布に遷移する時間は，伝播距離が大きいほど，また κ が小さいほど早いことが分かった．大規模な 3 次元差分法シミュレーションは，現実的な構造での波形計算だけでなく，基礎的な散乱研究に対しても非常に重要である．今後，4 次モーメントを含めた 2 乗振幅のばらつきの理論的な研究を行う予定である．

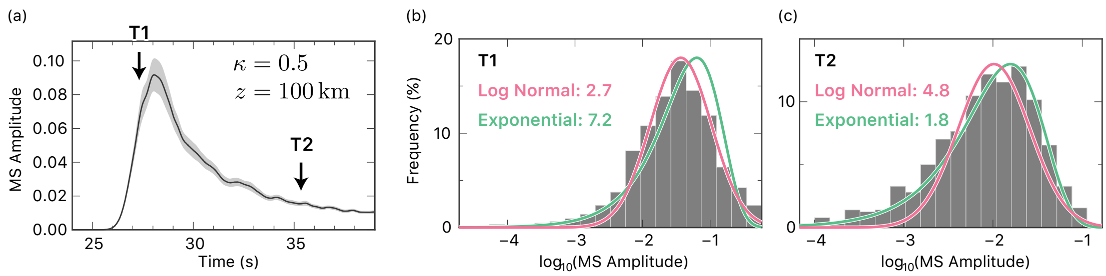

図 1　伝播距離 100 km，$\kappa = 0.5$ の場合の 2 乗振幅のばらつき．(a) 合計 640 個の波形から求めた平均 2 乗エンベロープを表す．灰色の領域は平均値 ±2 標準誤差を示す．(b), (c) 経過時間 $T1$ と $T2$ における 2 乗振幅のヒストグラムである．図中の数値は，換算 χ^2 値を表す．

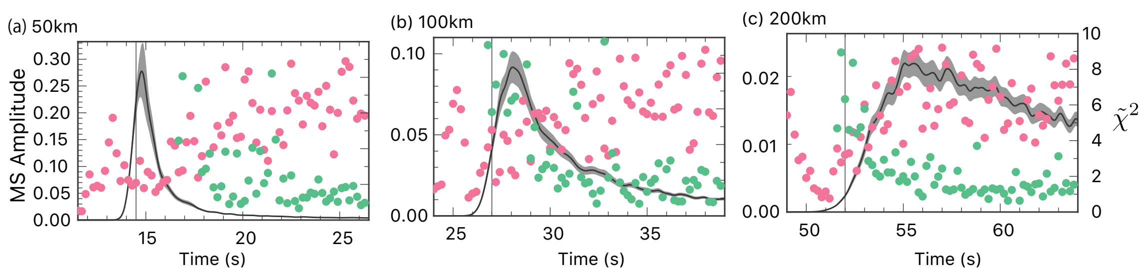

図 2　$\kappa = 0.5$ の場合における，異なる伝播距離での平均二乗エンベロープと 2 乗振幅分布の経過時間依存性．縦線は均質媒質での初動到達時刻を示す．赤色，緑色の丸はそれぞれ，対数正規分布と指数分布を当てはめた場合の換算 χ^2 値を示す（右軸）．

謝辞

理論波形計算には海洋開発研究機構の地球シミュレータを使用させて頂きました．