

変位成分による津波発生：静的成分と有限震源領域の破壊伝搬の定式化
蓬田 清（北大・理）

Tsunami excitation problems with displacement vectors:
Static components and rupture over a finite source region
Kiyoshi Yomogida (Graduate School of Science, Hokkaido Univ.)

津波は一様非圧縮流体と見なせるので、津波の励起・伝搬においては速度ベクトル \mathbf{v} と速度ポテンシャル $\mathbf{v} = \nabla\phi$ (非圧縮で $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2\phi = 0$ を満たす)によって通常は表現される (Pedlosky, 2003)。Saito (2013)は、この形式から海底面上昇による津波励起について、海面変動・速度場だけでなく、圧力変化を求めた。海底面上昇速度の時間関数として、継続時間 T が有限な箱型関数を仮定し (最後に $T \rightarrow 0$ で一瞬での上昇とする)、フーリエ領域での $\omega = 0$ という複素平面空間での極からの寄与によって、海底面が変動中だけ作用する新しい項が現れることを示した。 $\omega = 0$ は静的変動成分に対応し、地震学では変位に対して階段関数の震源時間関数で表現されてきた。本研究では、速度ではなく変位ベクトル \mathbf{u} ($\mathbf{v} = \partial\mathbf{u}/\partial t$)に基づく津波の励起・伝搬の定式化を行う。

重力下の一般的な流体運動は

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i,$$

$$f_i = -g\delta_{i3} \quad (1)$$

の方程式に従う。ここで、 ρ は密度、 D/Dt

はLagrange微分、 $\sigma_{ji} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ji}$ は応力テンソル (p は圧力、ダッシュ付きは圧縮性・粘性による応力)、 g は重力加速度 (一定とする) で z 軸を鉛直上向きとし、海面と海底面を $z = 0, -D$ とする。密度、圧力を重力下の平衡状態 (z のみの関数で添字0を付けた静水圧 $dP_0/dz = -\rho_0 g$) とそこからの微小擾乱の和とし、速度 $|\mathbf{v}|$ も微小とする。密度や圧力は鉛直方向の変位 w だけ移動するので (右上図参照)、例えば、以下のように表される：

$$\sigma_{zz} = -P_0(z-w) + \sigma'_{zz} = -P_0(z) + w dP_0/dz + \sigma'_{zz} = -P_0(z) - \rho_0 g w + \sigma'_{zz}$$

応力テンソルの他成分や密度も同様にして、式(1)に代入すると、

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-P_0(z)\delta_{ij} - \rho_0 g w \delta_{ij} + \sigma'_{ji} \right) - \left(\rho_0(z) - w \frac{d\rho_0}{dz} - \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \right) g \delta_{i3}$$

静水圧の式、および鉛直方向より水平方向のスケールがはるかに大きいので、密度 ρ_0 が一樣ならば式(1)の重力加速度 g を含む項は打ち消しあって、 σ'_{ji} のみの以下の式に帰着される：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \approx \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} \iff \sigma'_{ji} = -p_c \delta_{ij} = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \quad (2)$$

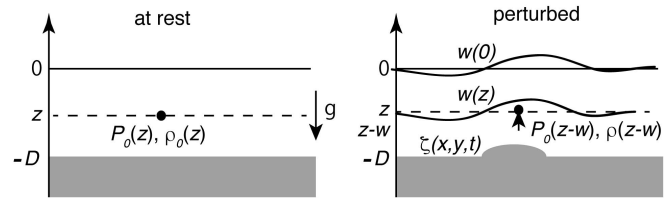
本研究では粘性は無視し、圧縮性のみ考慮する (κ は体積弾性率)。通常非圧縮流体近似では、 $\kappa \rightarrow \infty, \nabla \cdot \mathbf{u} \rightarrow 0, p_c$ は有限となる。まとめると、以下の連立微分方程式となる：

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_c}{\partial x_i}, \quad p_c = -\kappa \nabla \cdot \mathbf{u} = -\kappa \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3)$$

ここで、津波では水圧を測定する深さ z は海底面や海面の変動 $w(z)$ に沿って測定するので、静止空間系で考えた p_c ではなく、以下に定義される圧力に対応していることに注意：

$$p_1 \equiv p_c + P_0(z+w) - P_0(z) = p_c + w dP_0/dz = p_c - \rho_0 g w \quad (4)$$

Saito (2013)と同様に (以下、2次元問題とする)、 $u_i \sim \exp(i(kx - \omega t))$ の平面波分解の形式、すなわちフーリエ領域で考えると、式(3)は $w \equiv u_z$ と p_c についての深さ z に対する連立微分方程式となる：



$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} w \\ p_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \xi^2/\rho_0\omega^2 \\ \rho_0\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ p_c \end{bmatrix}, \quad u \equiv u_x = \frac{ik}{\rho_0\omega^2} p_c \quad (5)$$

ここで $\xi^2 \equiv k^2 - \rho_0\omega^2/\kappa$ だが、非圧縮流体では、 $\xi \rightarrow k$ となる。また、1次元速度構造のSH波の深さ伝搬と同じ形式である（本研究では ρ, κ が一定とするが、変化する場合にも適用できる）。式(5)より2つの深さ z, z_0 の関係、さらに式(4)の p_1 に対する解が得られる：

$$\begin{bmatrix} w(z) \\ p_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\xi(z-z_0) + g\xi/\omega^2 \cdot \sinh\xi(z-z_0) & \xi^2/\rho_0\omega^2 \cdot \sinh\xi(z-z_0) \\ \left(\frac{\rho_0\omega^2}{\xi} - \frac{\rho_0g^2\xi}{\omega^2}\right) \sinh\xi(z-z_0) & \cosh\xi(z-z_0) - \frac{g\xi}{\omega^2} \sinh\xi(z-z_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(z_0) \\ p_1(z_0) \end{bmatrix} \quad (6)$$

津波の伝搬においては、海底面では $w(z_0=-D)=0$ 、海面では $p_1(z=0)=0$ となり、式(6)の行列の右下の要素がゼロとなり、一般的な津波の分散関係が得られる：

$$\omega_0^2 \equiv g\xi \tanh\xi D \rightarrow gk \tanh kD \quad (7)$$

津波励起では、式(6)で上の条件に代わり海底面変動を与える（以下、 $\xi \rightarrow k$ とする）：

$$w(x, z_0 = -D, t) \equiv \zeta(x, t) \sim \exp(i(kx - \omega t))$$

式(6)の第2式で $p_1(z=0)=0$ より、まず圧力 $p_D \equiv p_1(z=-D)$ を求め、式(6)の第1式より

$$w(k, z, \omega) = \frac{\omega^2 \cosh kz + gk \sinh kz}{(\omega^2 - \omega_0^2) \cosh kD} \zeta(k, \omega) \quad (8)$$

を得る。海底面変動の時間変化を階段関数 $H(t)$ とすると、 $\zeta(k, \omega) \sim \zeta(k)/(-i\omega)$ より式(8)は $\omega = \pm\omega_0, 0$ の3つの極が存在し（Saito(2013)では速度ポテンシャルを議論したので、 $\zeta(t)$ はデルタ関数であり、式(8)の類似の式で $\omega \rightarrow \pm\infty$ が収束しない問題があったが、ここでは $H(t)$ を用いるので自然に収束する）、それらの留数を足し合わせると鉛直変位が求まる：

$$w(k, z, \omega) = \frac{\zeta(k)}{\cosh kD} \left[\left(\cosh kz + \frac{\sinh kz}{\tanh kD} \right) \cos\omega_0 t - \frac{\sinh kz}{\tanh kD} \right] H(t) \quad (9)$$

式(9)を微分して鉛直速度を求めると、Saito(2013)の結果と一致する。式(3)より水平変位 u と圧力 p_c が求まり、さらに式(4)より津波で測定される水圧 p_1 は以下のようなになる：

$$p_1(k, z, \omega) = -\zeta(k)\rho_0 \left[g \frac{\sinh kz}{\sinh kD} \left(\frac{\cos\omega_0 t}{\cosh^2 kD} - 1 \right) H(t) + \frac{\sinh kz}{k \cosh kD} \delta'(t) \right] \quad (10)$$

先に説明したように、 $p_1(z=0)=0$ に対して、(海面の上下変動のない座標系での値のために) p_c はゼロにならない点を確認される。海底面での水圧は

$$p_1(k, -D, \omega) = \zeta(k)\rho_0 \left[g \frac{\cos\omega_0 t}{\cosh^2 kD} H(t) + \frac{\tanh kD}{k} \delta'(t) - gH(t) \right] \quad (11)$$

となり、最後の項を除き、Saito(2013)と同じ結果となった。この $-\rho_0 g \zeta(k, t)$ の項は海底面上昇に伴って計測器の設置される水深が浅くなり、水圧が減少する効果に対応する。

本研究はSaito(2013)の別解を示しただけでなく、(1)海底面上昇分を自然な形の時間関数として導入できる（地震学と対応）、(2)密度の深さ変化、海水の圧縮性やさらに粘性効果（式(2)に圧力以外に粘性項を追加すれば良い）を考慮する場合にも自然に拡張でき、より詳細な津波の励起・伝搬過程における基礎的な定式化として有効である。

拡張例の一つとして、有限断層での破壊伝搬、すなわち $\zeta(x, y, t)$ が有限な破壊伝搬速度 v_R の時空間で変動する場合を定式化する。 v_R は津波の伝搬速度の数倍以上の超音速状況だが、破壊面の進行方向と反対側では点震源の足しあわせでは不十分である。

<謝辞> 齋藤竜彦氏には初期の段階から多くの有益な助言をいただいた。

<引用文献> • Pedlosky, *Waves in the Ocean and Atmosphere*, Springer, 2003.

• Saito, *Earth Planets Space*, **65**, 1411-1423, 2013.