ウィーナーフィルターに基づく位相飛びの影響のない新しいインバージョン法：地震波形および In-SAR への応用

蓬田 清（北大・理）

Inversions with the use of Wiener filters not affected by phase unwrapping: Application to seismic waveform or 2-D In-SAR data

Kiyoshi Yomogida（Graduate School of Science, Hokkaido Univ.）

波形記録$d(t)$と合成波形$f(t)$の差を直接最小にする波形インバージョン法は、地震学で広く用いられてきた。しかし、位相の2πの任意性によるローカル極小が真の極小の周りに多数分布するため、初期モデルが悪い場合、最適解に収束しない（Warner & Guasch, 2014）。時間領域での波形は山・谷（正・負）が交互に現れることに起因するが、こうした位相の特徴はインバージョンの分解能を高めているわけで、その功罪が表裏一体である。

位相の任意性を取り除くため、二つの波形を直接比較する代わりに、２段階の手法を提案する。第１段階として、個別（j番目とする）の二つの波形の差をWienerフィルター $w_j(t)$ で表現する（*は畳み込みで、データ数がN）： $\min.\ \sum_{i=0}^{N-1}\left(f_j(t_i)*w_j(t_i)-d_j(t_i)\right)^2\Delta t$

上式は$w_j(t_i)$を未知数とするToeplitz型行列の形式になるので、Levinsonによって提案された漸化式型の解法で効率的に求めることができる(Wiener, 1949)。Wienerフィルターがインパルス型（t_i =0で１、他はゼロ、連続変数ならばデルタ関数に対応）であれば二つの波形が一致するという理想的な状況を示している。よって、第２段階では、全波形（Lセットとする）のt_i =0からのずれの二乗和が最小という基準でモデルパラメターを求めればよい：

$$\min.\ \sum_{j=1}^{L}\left(\sum_{i=-M/2}^{M/2}\left(t_i w_j(t_i)\right)^2 \Big/ \sum_i w_j(t_i)^2\right) \approx \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=-M/2}^{M/2}\left(d\ln W_j(\omega_i)/d\omega_i\right)^2$$

ここで、時刻のずれは正負どちらの可能性もあるので、non-causalなフィルター形式とする。また、フィルタの係数の絶対値に依存しないように、上式の分母に対応する規格化が必要である。周波数領域$W(\omega)$では対数の微分の二乗和が最小の基準、つまり、上式の等号はParsevalの定理で両辺をωで微分した結果に対応し、左辺が最小となるのは、振幅も位相も（$\ln W(\omega)$の実部と虚部）が一定という条件であり、周波数領域におけるインパルス型信号（i.e., デルタ関数なので、振幅は一定で位相はゼロ）に確かに対応している。

図１にまとめた新しい波形インバージョン法では、たとえ真のモデルがかなり複雑としても、単純な初期モデルから安定してこのグローバル最適解へと収束する。それは二つの波形の違いをWienerフィルタで表現するために、「原点(t=0)からのずれ」という山・谷（正・負）が関係しない基準となったため、ローカルな極小が原則として現れないためである。（ただし、モデルパラメターとデータのそれぞれの変動の関係についての本質的な非線形性の問題は、この手法でも不可避である点は注意が必要で、有効なiterationは不可欠。）

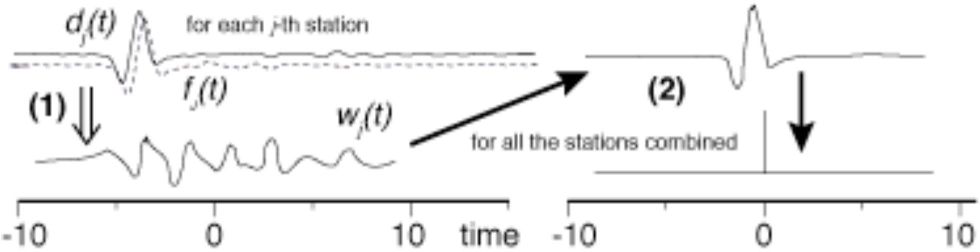

図１：２段階の波形インバージョン法の概念

この手法は波形インバージョンばかりでなく、広範な拡張の可能性がある。Wienerフィルターが現在最も用いられているのは画像処理の分野なので、時系列（波形データ）でなく、２次元の空間データは自然な応用である。第１段階では、２次元Wienerフィルター$w(x,y)$を当てはめ、第２段階では、$w(x,y)$が原点でインパルス型となれば（図２）二つの画像が一致するので、原点からの距離 $r \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ が重みの最小二乗となるような、以下の基準を用いればよい：

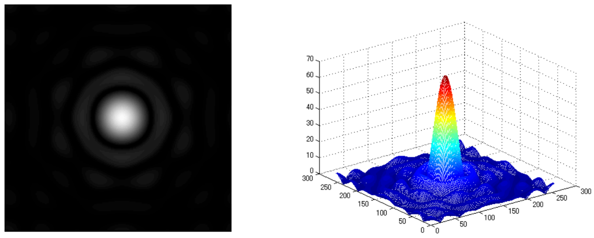

図２ ：２次元データでのWienerフィルターの最適モデルでの形状

$$\min. \sum_{k=1}^{L}\left(\sum_{i,j}\left[\left(x_i w_k(x_i,y_j)\right)^2+\left(y_j w_k(x_i,y_j)\right)^2\right]\Big/\sum_{i,j} w_k(x_i,y_j)^2\right)=\sum_{k=1}^{L}\left(\sum_{i,j}\left(r_i w_k(r_i,\theta_j)\right)^2\Big/\sum_{i,j} w_k(r_i,\theta_j)^2\right)$$

位相の2πの任意性が大きく影響する一例に、干渉合成開口レーダー（InSAR）がある。二つの時刻のレーダー反射画像の干渉パターンより衛星からの視線方向の変位差を測定する。その際に、波長（e.g., ALOSのLバンドなら23.61cm）毎に縞模様、つまり2πの位相差の繰り返しを取り除く"phase unwrapping"操作が不可欠だが、かなり経験的・主観的な処理が施されている。本研究の手法なら、phase unwrapping無しの生の位相差の画像データと、モデルからの合成画像データとの差を２次元Wienerフィルターで表し、これを上の最適化条件より客観的に判断すればよい。現在のInSAR研究では複数のモデルの優劣を比較するが、インバージョンでなくとも、その判定基準として用いて有効である。

Wienerフィルターの利点の一つはフーリエ変換を用いない点であり、短い記録にも適応できる。例えば、下図のScS波などの波群の相互比較では、従来は各波群をフーリエ変換した上で、周波数領域で振幅比・位相差の測定がされてきた。フーリエ変換の際の時間窓の長さの設置や両端の処理によって解析結果が影響されてしまうが、波形そのものから求めるWienerフィルターならこのような短い記録でも正確な定量化ができる。分散性の表面波の一部の時間枠のみの波群の解析にも、同様に有効である。

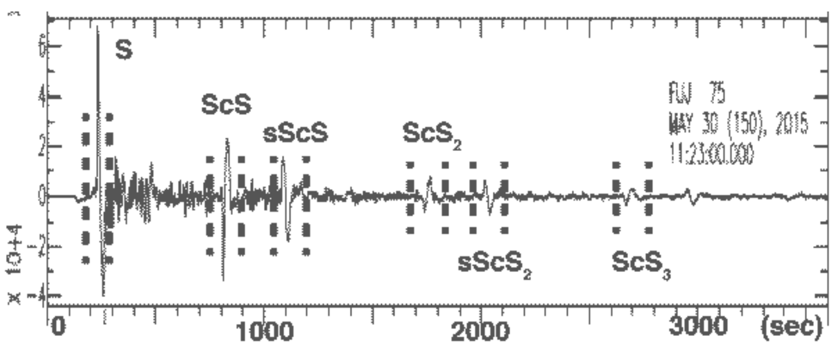

図３ ：ScSなどの短い時間窓のデータの比較例：2015/5/30小笠原西方沖深発地震のFUJ(F-net)での周期50秒より長周期のtransverse成分。

＜謝辞＞　F-net観測波形の解析の一部は、武藤真央梨によって行われた。

＜引用文献＞

・Warner & Guasch, 76th EAGE Conference, doi: 10.3997/2214-4609.20141092, 2014.

・Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, John Wiley, 1949.