

# べき乗型スペクトルを持つランダム構造における波形エンベロープの拡大

佐藤春夫（東北大）

ランダム不均質構造の中を伝播する波動は、震源でパルス的であっても、伝播距離の増加と共にその見かけ継続時間は大きくなる（エンベロープ拡大）。フォンカルマン型ランダム媒質の場合、これまでの研究では、中心波数  $k_c$  がコーナー波数  $a^{-1}$  より高いという条件の下では放物近似が成り立つという考えで行われてきた（たとえば Saito et al. 2002）。コーナー波数より高い波数ではべき乗型スペクトルとなるが、中心波数より高いスペクトル成分に対しても放物近似を適用することになる。特にスペクトル勾配が緩い場合にはこの影響は大きく、広角度散乱が大きくなるという問題も生じる。

$$P(m) = P(m) = \frac{8\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(\kappa + \frac{3}{2})\varepsilon^2 a^3}{\Gamma(\kappa) (1 + a^2 m^2)^{\kappa + \frac{3}{2}}} \quad \text{for } \kappa > 0,$$

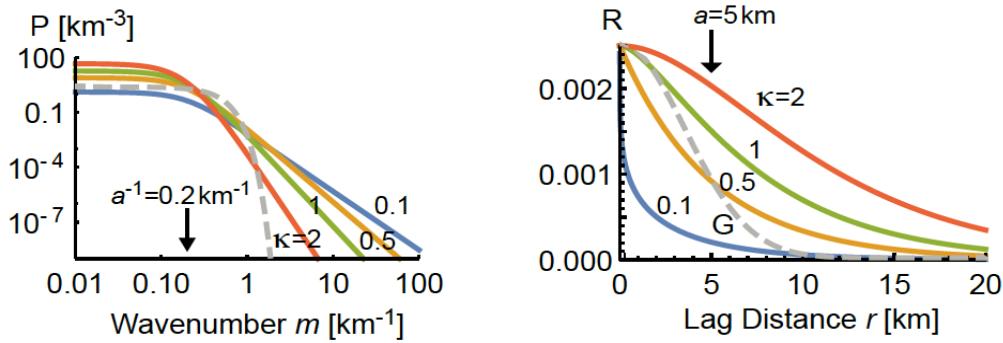


Fig. 1. フォンカルマン型ランダム媒質のパワースペクトル密度と自己相関関数 ( $\varepsilon = 5\%$ ,  $a = 5 \text{ km}$ ,  $V_0 = 4 \text{ km/s}$ ).

本研究では、パルス波の中心波数が  $k_c$  の場合、パラメータ  $\zeta$  を導入し、 $\zeta k_c$  を基準にして、(1) ランダム速度不均質を低波数成分  $P_L$  と高波数成分  $P_S$  とに分解し、(2) 低波数（長波長）ランダム成分  $P_L$  に放物近似を適用してエンベロープ拡大を求め、(3) 高波数（短波長）ランダム成分  $P_S$  にボルン近似を適用して広角度散乱による散乱減衰を求めることを提案する。

$$a_S^{-1} = \zeta k_c, \quad \varepsilon_S = \left(\frac{a_S}{a}\right)^\kappa \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\nu^\kappa} = \frac{\varepsilon}{(\zeta a k_c)^\kappa}.$$

$$P_S(m) \equiv \frac{8\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(\kappa + \frac{3}{2})\varepsilon_S^2 a_S^3}{\Gamma(\kappa) (1 + a_S^2 m^2)^{\kappa + \frac{3}{2}}}$$

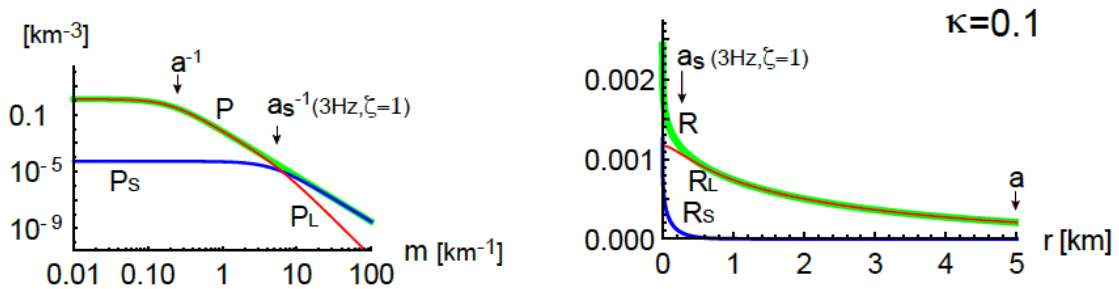


Fig. 2. パワースペクトル密度と自己相関関数の分解 ( $\varepsilon = 5\%$ ,  $a = 5 \text{ km}$ ,  $V_0 = 4 \text{ km/s}$ . 中心周波数  $3 \text{ Hz}$ ,  $\zeta = 1$  の場合).

### 長波長成分によるエンベロープ拡大

上記のようにパワースペクトル密度を分解することで, Markov 近似によって2周波数相互相関関数を解析的に求めることが可能となる. 点震源から球対称に輻射されたパルス波のエネルギー密度(速度成分の2乗振幅平均)は, 次式で与えられる.

$$G_{MW}(r, t; \omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{M0}(r, t-t'; \omega_c) w(r, t') dt'$$

$$G_{M0}(\kappa, \zeta, \omega_c, r, t) = \frac{1}{4\pi r^2 V_0} \frac{\pi^2}{16 t_M(\kappa, \zeta, k_c, r)} \vartheta_4'' \left( 0, e^{-\frac{\pi^2}{4} \frac{(t-r/V_0)}{t_M(\kappa, \zeta, k_c, r)}} \right) H \left( t - \frac{r}{V_0} \right)$$

$$w(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}(r, \omega_d) e^{-i\omega_d t} d\omega_d = \frac{1}{\sqrt{\pi t_W(r)}} e^{-\frac{t^2}{t_W(r)^2}}$$

ここで, 走時ゆらぎとエンベロープ拡大の特徴的時間は次のように与えられる.

$$t_W(\kappa, \zeta, k_c, r) = \frac{2}{V_0} \sqrt{\varepsilon^2 a \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\kappa + \frac{1}{2})}{\Gamma(\kappa)} (1 - (\zeta a k_c)^{-2\kappa - 1})} \sqrt{r}.$$

$$t_M(\kappa, \zeta, k_c, r) = \frac{\varepsilon^2 r^2}{2V_0 a} \times \begin{cases} \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\kappa + \frac{1}{2})}{(2\kappa - 1)\Gamma(\kappa)} (1 - (\zeta a k_c)^{1-2\kappa}) & \text{for } \kappa \neq \frac{1}{2}, \\ \ln \zeta a k_c & \text{for } \kappa = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

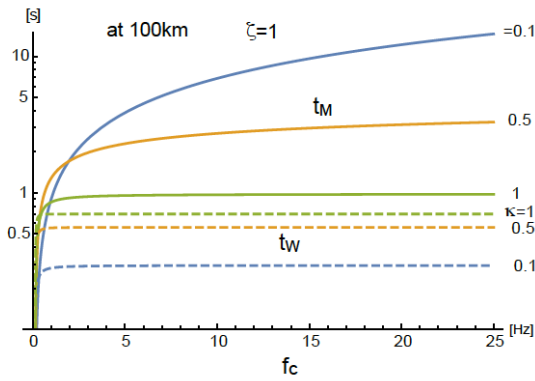


Fig. 3. 距離 100km における  $t_M$  (実線) と  $t_W$  (点線) の周波数依存性 ( $\zeta=1$ ).

Peak delay  $t_p \approx 0.37t_M$ .

Maximum peak value  $G_{M0}|_{Max} \approx 1.48/(4\pi r^2 V_0 t_M)$ .

$$\int_0^{\infty} 4\pi r^2 V_0 G_{MW} dt = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 V_0 G_{M0} dt$$

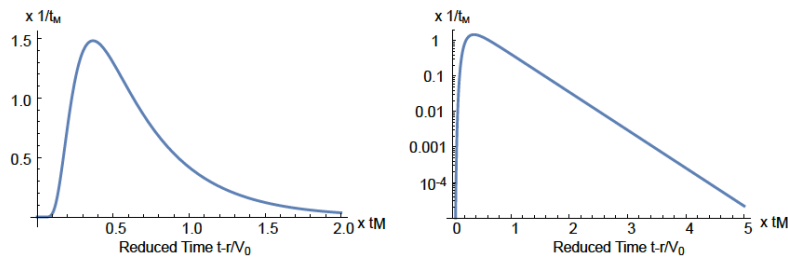


Fig. 4.  $4\pi r^2 V_0 G_{M0}$  の  $t-r/V_0$  に対するプロット.

## 短波長成分による散乱減衰

一方，短波長ランダム成分による広角度散乱の効果は，全散乱係数で与えられる．

$$\begin{aligned} g_{SO}(\kappa, \zeta, k_c) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_0^\pi \sin\psi d\psi g_S(k_c, \psi) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\psi d\psi \frac{k_c^4}{\pi} P_S(2k_c \sin \frac{\psi}{2}) \\ &= \frac{k_c^2}{2\pi} \int_0^{2k_c} P_S(m) m dm, \end{aligned}$$

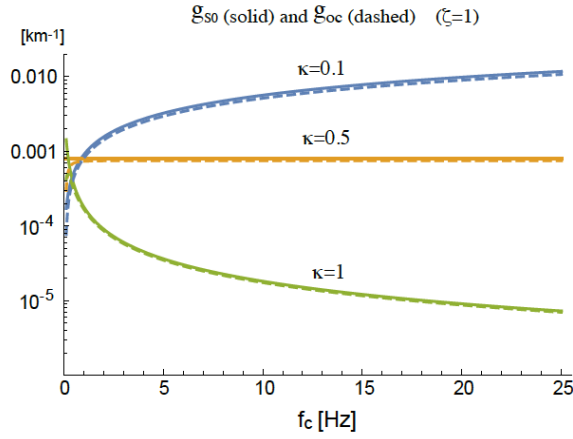


Fig. 5. 散乱減衰の周波数依存性 ( $\zeta=1$ ).

## エンベロープ拡大，散乱減衰，走時ゆらぎを取り入れたエンベロープ解

長波長成分によるエンベロープ拡大と走時ゆらぎの効果に，短波長成分による散乱減衰を取り入れたエンベロープは，次のように与えられる．

$$G_{MOS}(\kappa, \zeta, \omega_c, r, t) \equiv G_{M0}(\kappa, \zeta, \omega_c, r, t) e^{-g_{SO}(\kappa, \zeta, k_c) V_0 t},$$

$$G_{MWS}(\kappa, \zeta, \omega_c, r, t) \equiv G_{MW}(\kappa, \zeta, \omega_c, r, t) e^{-g_{SO}(\kappa, \zeta, k_c) V_0 t}.$$

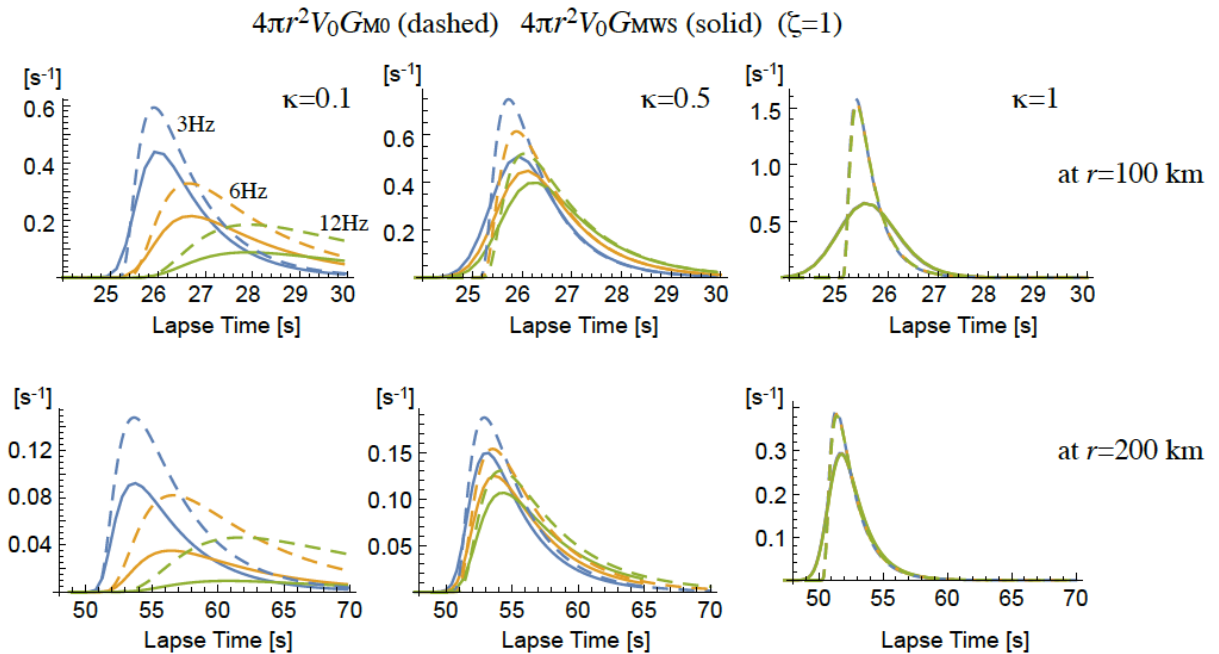


Fig. 6. エンベロープ拡大，散乱減衰，走時ゆらぎを取り入れたエンベロープ解 ( $\zeta=1$ ).

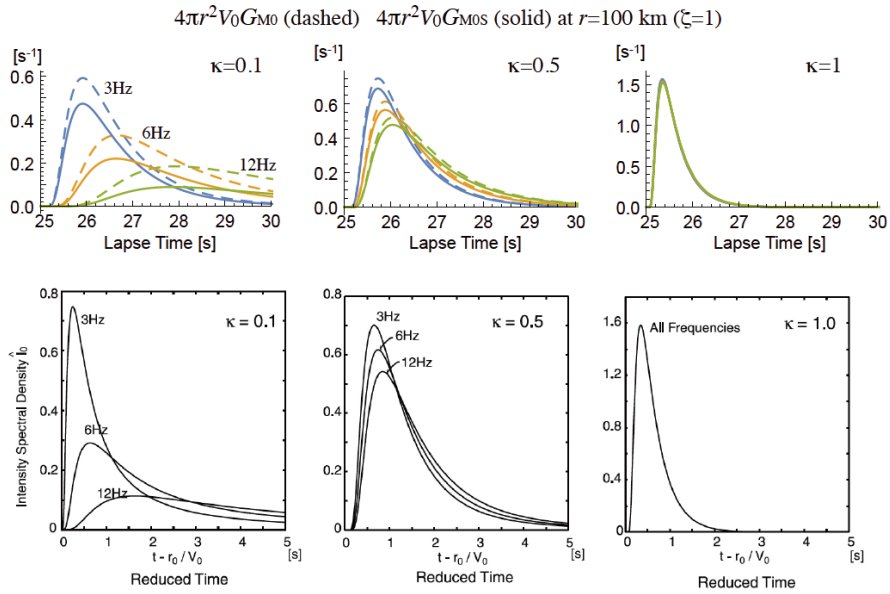


Fig. 7. 距離 100km におけるエンベロープ解の比較.  
 下図は短波長成分を含む放物近似の数値解 (Saito et al. (2002)).

Time Trace of  $4\pi r^2 V_0 G_{M0s}$  at  $r=100$  km ( $\zeta$ : 0.25 - 1.75, step 0.25)

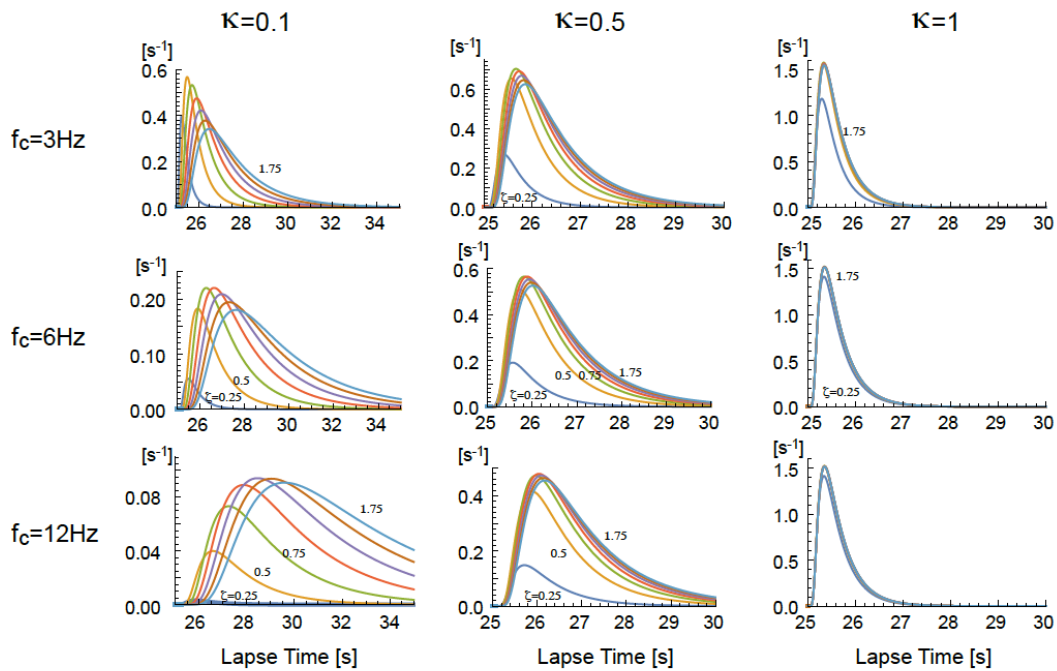


Fig. 8.  $\zeta k_c$  を基準にしてスペクトルを分割した場合のエンベロープ解 ( $\zeta$ : 0.25-1.75).

## 結論

べき乗型スペクトルを持つランダム構造の中を伝播するパルス波の 2 乗振幅エンベロープに関する新しい導出法を提案した. フォンカルマン型ランダム媒質の場合, 中心波数を基準にスペクトルを分解し, 低波数 (長波長) 成分に対しては放物近似を, 高波数 (短波長) 成分に対してはボルン近似を適用することにより, エンベロープ拡大, 散乱減衰, 走時ゆらぎを取り入れた解析解を導出することが可能となった. 今後, 差分計算との比較によって, パラメータ  $\zeta$  の値を検討する計画である.