圧縮性と密度成層のある海水の津波速度−重力下の弾性体の微小運動学−

綿田辰吾（東京大学地震研究所）

Equation of motion of elastic fluid solid bodies under gravity

Shingo Watada (ERI, Univ. of Tokyo)

１　はじめに

地震の波動現象を対象とする研究は、弾性力を考慮した運動支配方程式（以下運動方程式）と境界条件から出発し、問題に合わせて解析解や計算機を使った数値解を得ている。重力下の浮力を含めた流体・固体弾性体の運動方程式と境界条件の導出では、重力下で互換でないLagrangian とEulerian の２種類の変数が、しばしば明示されることなく使われ、少なからずの論文や教科書の混乱・誤用の原因となっている（例えば、斎藤(2009)序章)。地球自由振動を記述する運動方程式は、浮力に加え、密度摂動が引き起す重力場変動まで正しく取り入れ、運動方程式が球座標系で記述されている（例えば、斎藤 (2009)20 章、Watada and Kanamori (2010) Appendix A)。以下では重力場の変動を考慮せず、弾性と浮力の効果のみを入れた直交座標系の運動方程式と境界条件をLagrangian 変数とEulerian 変数を明示して記述する。講演中に考え方の基本原理と式導出過程を詳説する。どちらの種類の変数を選ぶかは任意であり、どちらでもかまわない。通常は、扱いやすい変数を選ぶ。

２　式導出の概略

$Q_o, Q', \delta Q$はそれぞれ変数Qの静止状態量、静止状態からの微小変形（変形ベクトル$\boldsymbol{u}$）に伴うEulerian、Lagrangian 変動量を表わす。Eulerian 変動量とLagrangian 変動量は変位の一次まで考慮すると、以下の関係にある。

$$\delta Q = Q' + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)Q_o$$

直交座標系ではQはスカラー、ベクトル要素、テンソル要素としてよい。$\rho, p, c_s, K, \mu, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{u}/\partial t$はそれぞれ密度、圧力、音速、体積弾性率、剛性率、応力テンソル、歪テンソル、変位速度ベクトルである。x, yは水平座標で、z軸は鉛直上向き。一定重力$\boldsymbol{g} = (0,0,-g)$はｚ軸下向き。無限小歪みのみを扱うため、$\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{e}$は対称テンソルである。応力は静止状態でも重力による有限の静水圧（または土圧）$\tau_{oij} = -p_o(z)\delta_{ij}$がある。無限小歪みなので Eulerian 変数でもLagrangian 変数でも変位の一次まで考慮すると歪み$\boldsymbol{e}$は同じ(Cauchy の歪みテンソル)である。以下では ▲が流体、■が固体向けの式をそれぞれ表している。

▲■歪みの定義

$$e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

▲■運動量保存則は重力項を含めEulerian 変数を用いて以下の式となる。

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \equiv \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\boldsymbol{g}$$

▲■静的釣り合いの式$\partial/\partial t = 0$は以下の式となる。

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau_o} = -\nabla p_o(z) = -\rho_o(0,0,-g)$$

以下は変位$\boldsymbol{u}$の一次の精度で左側が Lagrangian 変動量、右側が Eulerian 変動量を用いた基本式である。

Lagrangian 記載　　　　　　　　　　Eulerian 記載

▲■質量保存則

$$\delta\rho + \rho_o(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = 0 \qquad \rho' + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\rho_o) = 0$$

▲流体の構成則（断熱状態方程式）

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho = \frac{K}{\rho}\delta\rho \qquad p' + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p_o = K(\rho' + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho_o)$$

■固体（等方弾性体）の構成則（断熱状態方程式）$(i,j) = (x,y,z), e_{kk} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$

$$\delta\tau_{ij} = (K - 2/3\mu)e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \qquad \tau'_{ij} = (K - 2/3\mu)e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \rho_o g u_z \delta_{ij}$$

▲弾性流体の運動方程式

$$\rho_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\nabla(\delta p + \rho_o g u_z) + \left(\delta\rho - u_z \frac{d\rho_o}{dz}\right)\boldsymbol{g} \qquad \rho_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\nabla p' + \rho' \boldsymbol{g}$$

■弾性固体の運動方程式

$$\rho_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\delta\boldsymbol{\tau} - \rho_o g u_z \boldsymbol{I}) + \left(\delta\rho - u_z \frac{d\rho_o}{dz}\right)\boldsymbol{g} \qquad \rho_o \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' + \rho' \boldsymbol{g}$$

境界の下側の変数に添字 b(beneath)を、上側に a(above)を使うとする。

▲流体・流体の変位の境界条件　水平成分u_x, u_yの連続性は保証されず、鉛直成分は

$$u_{zb} = u_{za}$$

圧力境界条件は

$$\delta p_b = \delta p_a \qquad \Delta p_{ba} = p'_a - p'_b = -(\rho_{ob} - \rho_{oa}) g u_z$$

▲■固体・流体の変位の境界条件は流体・流体の境界条件と同じ。応力の境界条件は

$$\delta\tau_{xx} = \delta\tau_{yy} = \delta\tau_{zz} \qquad \Delta\tau_{ba} = \tau'_{iia} - \tau'_{iib} = (\rho_{ob} - \rho_{oa}) g u_z$$

$$\delta\tau_{xy} = \delta\tau_{yz} = \delta\tau_{zx} = 0 \qquad \tau'_{xy} = \tau'_{yz} = \tau'_{zx} = 0$$

流体中では応力と圧力の符号が異なること

$$\delta\tau_{zz} = \delta\tau_{yy} = \delta\tau_{zz} = -\delta p \qquad \tau'_{zz} = \tau'_{yy} = \tau'_{zz} = -p'$$

に注意。

■固体・固体の境界条件は、変位の全成分が連続

$$\boldsymbol{u}_b = \boldsymbol{u}_a$$

応力の境界条件は

$$\delta\boldsymbol{\tau}_b = \delta\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{a}} \qquad \Delta\tau_{ba} = \tau'_{iia} - \tau'_{iib} = (\rho_{ob} - \rho_{oa}) g u_z$$

$$\tau'_{ija} = \tau'_{ijb}, \qquad i \neq j$$

３．重力項を導入するときの注意

重力がゼロの場合($g = 0$)、Lagrangian 変数と Eularian 変数で記述された弾性流体・固体の微小運動の運動方程式と境界条件の式の形は、$\boldsymbol{u}$の一次精度で一致する。そのため、重力がない弾性体の振動問題では、２種類の変数を区別することなしに解析が可能となる。弾性力学や地震学において、重力を考えない議論で Lagangian 変数と Euleian 変数の区別をしない理由はここにある。ただし、式の形が一致するだけで、二つの変数が一致することを意味しない。たとえば、Eulerian の密度変動と Lagrangian の密度変動は、物質に密度勾配があれば重力がなくても$\boldsymbol{u}$の一次精度で異なる。

逆に、重力ゼロの条件で成り立つ運動方程式や境界条件に、重力の効果を加えるときは、運動方程式に使われている各物理量が Lagrangian 変数、Eulerian 変数のいずれかであるか判断し、適切な重力項を付け加える必要がある。弾性力学や地震学で使われている応力や密度変化の変数は Lagrangian 変数で記載する習慣があるため、運動方程式に変更が必要であるが、境界条件は変わらない。一方、流体力学では圧力や密度の変化は Eulerian 変数で記載する習慣があるので、運動方程式は構成則を通じて重力項が加わり、境界条件も重力項が加わる。流体と固体を同時に扱う場合には、流体と固体の各物理量を同じ種類の変数(Lagrangian か Euleiran)で一貫して記載するか、または、固体・液体境界で、変数の種類が変わるように独立変数の線形結合を構築し、境界で異なる種類の変数を接続する。各物理量が一貫して同じ種類の変数で記載されていれば、運動方程式や境界条件に Eulerian 変数と Lagrangian 変数が混ざっていてもかまわない。(例えば、Watada and Kanamori(2010), Appendix A)

４.応用例

弾性を考慮した重力下の水波の伝播を考える。Watada(2013)は、重力下で密度成層する弾性流体の運動方程式から出発し、平面波$\exp(kx + mz - \omega t)$で与えられる Lagrangian 時間空間変動量が、密度成層流体を伝播するときの伝播行列を求めている。以下は$z = z_{l-1}$から$z = z_l = z_{l-1} + d_l$への$(v_z, \delta p)^T$の伝播行列表示。行列要素は、水厚d_l、音速c_s、重力gと、密度そのものではなく密度勾配$H = -\rho_o/(d\rho_o/dz)$に依存している。

$$\begin{pmatrix} v_z(z_l) \\ \delta p(z_l) \end{pmatrix} = A_l(d_l, \omega, k, m, c_{sl}, g, H_l, \rho_l) \begin{pmatrix} v_z(z_{l-1}) \\ \delta p(z_{l-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{l11} & a_{l12} \\ a_{l21} & a_{l22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_z(z_{l-1}) \\ \delta p(z_{l-1}) \end{pmatrix}$$

A_lは 2x2 の伝播行列。1 層の場合の圧縮性流体の分散関係式は、自由表面($\delta p(z_l) = 0$)と剛体底($v_z(z_{l-1}) = 0$)の境界条件から、 要素$a_{l22} = 0$が要請され、書き下すと位相速度は以下のように求まる。

$$c_p^2 \equiv \frac{\omega^2}{k^2} = d\left(g - \frac{\omega^2}{2k^2 H}\right)\frac{\tanh(Md)}{Md},$$

ただし、

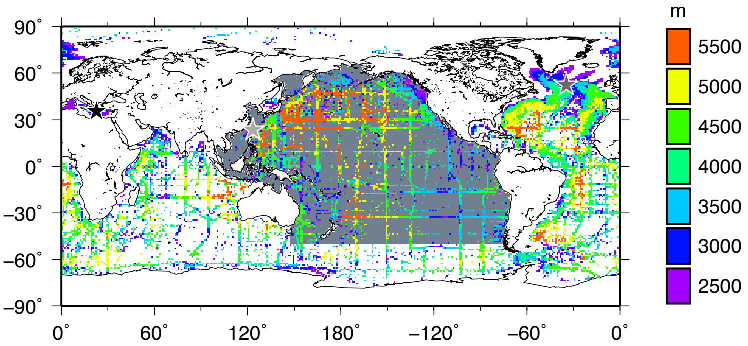
$$M^2 \equiv -m^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} + \frac{k^2}{\omega^2}\left(\frac{g}{H} - \frac{g^2}{c_s^2}\right) - k^2 - \frac{1}{4H^2}$$

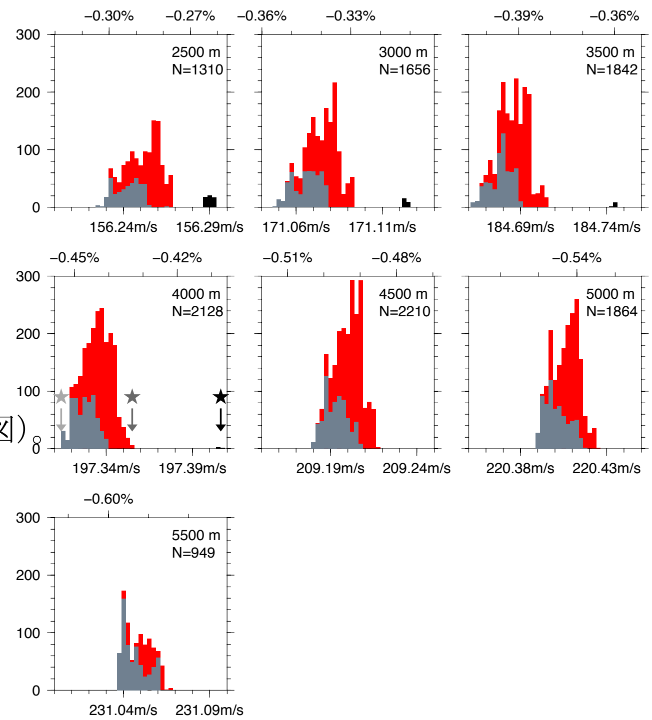
求まった分散関係式には密度そのものではなく密度勾配Hが含まれている。任意の密度・音速を持つ密度成層構造の分散関係式は、L層積み上げて表現した伝播行列表現となる。

$$\begin{pmatrix} v_z(z_L) \\ \delta p(z_L) \end{pmatrix} = A_L A_{L-1} \dots A_1 \begin{pmatrix} v_z(z_o) \\ \delta p(z_o) \end{pmatrix} = B_L \begin{pmatrix} v_z(z_o) \\ \delta p(z_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{L11} & b_{l12} \\ b_{l21} & b_{l22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_z(z_o) \\ \delta p(z_o) \end{pmatrix}$$

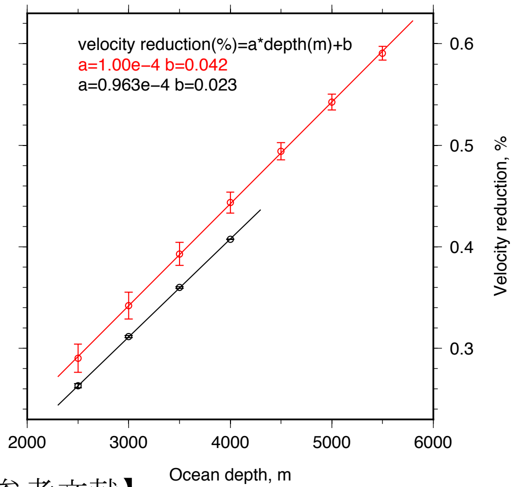
2x2 行列B_Lの要素から$b_{L22} = 0$から成層構造の水波の分散関係が求まる。

適応例として、World Ocean Atlas(2009)で与えられる、海洋域 6000 点以上の鉛直構造に対して適応し（左上図）、海水の密度・音速構造に起因する津波速度の頻度分布を求めた（右上図）





また、海水圧縮性に起因する津波速度はほぼ$\sqrt{gd}(1 - gd/4c_s^2)$で与えられることを示した（左下図）



【参考文献】

斎藤正徳（2009），地震波動論，東京大学出版.

Watada, S., and H. Kanamori (2010), JGR, 115, B12319, doi:10.1029/2010JB007747.

Watada, S. (2013), GRL, 40, 4001-4006, doi:10.1002/grl.50785.

密度・音速鉛直構造の例（右下図）