共鳴散乱を取り入れた輻射伝達理論

佐藤春夫（東北大理）・早川俊彦（三菱スペース・ソフトウェア）

ランダムな不均質構造を伝播する短周期地震波の考察には波形エンベロープに着目した輻射伝達理論が有効であるが，従来の理論では入射波が散乱体に当たると同時に散乱波が生じることが暗黙の仮定であった．しかし高速度の異常とは異なり，低速度の異常は波動をトラップし時間遅れをもって散乱波を生じる共鳴散乱の特性を持つ．火山地帯では構造の不均質が強いことが知られているが，近年の観測から S 波の平均自由時間は１ s 程度と短く，散乱波の生成が大きいことがわかってきた．特に火山直下では流体（低速度物質）の分布が想像されるので，短周期の地震波動の伝播を考察する際には，上記共鳴散乱の時間遅れ効果を考慮した輻射伝達理論の構築が重要である．Margerin(2013)は，小さな低速度球体が分布する場合について，弾性論のＢ－Ｓ方程式に拡散近似を用いて多重等方共鳴散乱の効果を考察している．本稿では，小さな低速度球体（等方共鳴散乱体）がランダム一様に分布する媒質において，多重散乱を記述する輻射伝達理論（スカラー波モデル）を提案する．

一様速度V_0の媒質中に置かれた半径aの低速度球体（$V_i = r_v V_0$, $r_v << 1$）にスカラー波$c(t - z/V_0)$が入射する場合，低周波における散乱には特に球対称モードの最低次項の寄与が大きい．この共鳴角周波数は$\omega_r = \pm\pi V_i/(2a)$，この散乱振幅のスペクトルピーク値は$\hat{\sigma}_{0,\max} \approx \frac{16a^2}{\pi r_v^2}$，その半値幅は$\tau^{-1} = 2V_0 r_v^2/a$である．入射波のスペクトルが等方散乱の共鳴角周波数を中心とする限られた幅$\Delta\omega$で平坦で$\int c(t)^2 dt = 1$と規格化される場合，$h_S(t) \equiv \frac{1}{\tau}\mathrm{Exp}\left(-\frac{t}{\tau}\right)$として，全散乱断面積の時間微分は$\dot{\sigma}_{1,0}(t) \approx \frac{\pi}{\Delta\omega}\frac{\hat{\sigma}_{0,\max}}{2\tau}h_S(t)$と書ける．この１次散乱波を入射波として２次散乱波の生成を計算し，２乗振幅のデコンボルーションから$\dot{\sigma}_{2,0}(t) \approx \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{0,\max}h_m(t)$を得る．同様に第 j 次散乱の場，$\dot{\sigma}_{j,0}(t) \approx \frac{j-3/2}{j-1}\hat{\sigma}_{0,\max}h_m(t)$が得られる．一次散乱を支配する$h_S(t)$は指数関数であるが，高次項を支配する関数$h_m(t) = \frac{t}{\tau^2}\mathrm{Exp}\left(-\frac{t}{\tau}\right)$は遅れ時間$\tau$にピークを持つ．散乱の次数無限大の極限では$\dot{\sigma}_{\infty,0}(t) \approx \hat{\sigma}_{0,\max}h_m(t)$に漸近し，時間積分から$\sigma_{\infty,0} \approx \hat{\sigma}_{0,\max}$が得られる．

昨年の発表では，１次散乱の計算で求められた$\dot{\sigma}_{1,0}(t)$をそのまま用いて多重散乱の効果を計算していた．しかし，２次散乱では時間的な遅れを持つ１次散乱波が入射波となるためにさらに遅れが生じる．上記の高次項の解はこの遅れ効果を取り入れたものである．

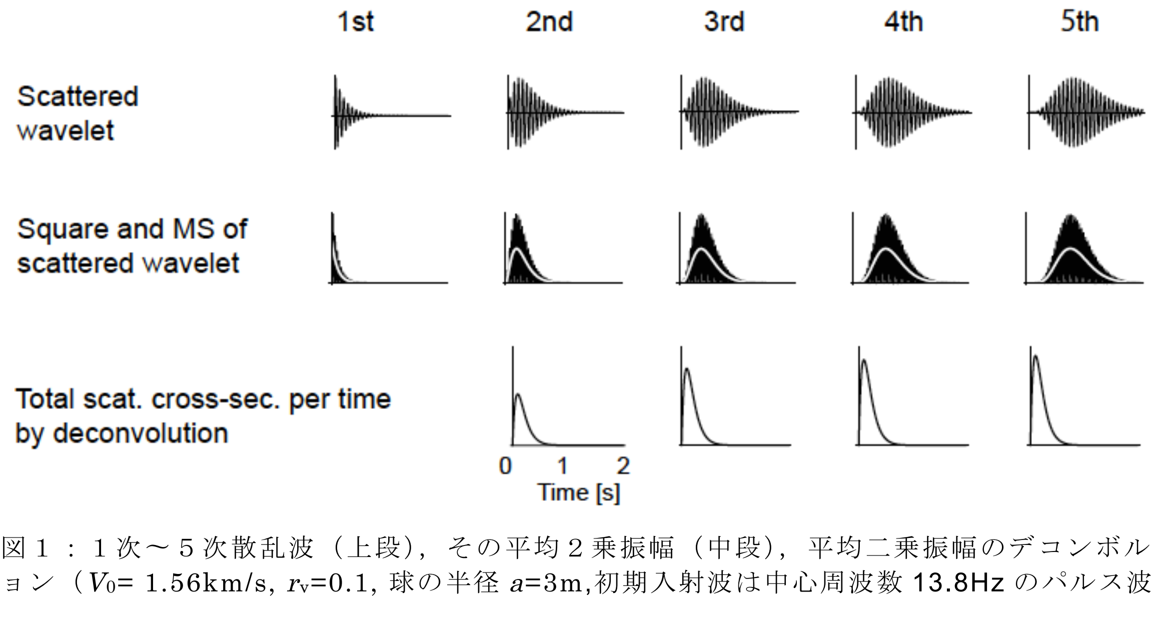

図１：１次～５次散乱波（上段），その平均２乗振幅（中段），平均二乗振幅のデコンボルーション（V_0= 1.56km/s, r_v=0.1, 球の半径 a=3m,初期入射波は中心周波数 13.8Hz のパルス波）．

このような低速度球が媒質中に一様ランダムに数密度nで分布する場合，各散乱次数の全散乱係数の時間微分は$\dot{g}_{j,0}(t)=n\dot{\sigma}_{j,0}(t)$で与えられる．この時間積分$g_{j,0}=\int_0^\infty \dot{g}_{j,0}(t)dt$を用いて，各散乱次数ごとの伝達関数を$G_j(r,t)=\frac{1}{4\pi V_0 r^2}\delta(t-r/V_0)\mathrm{Exp}(-g_{j,0}r)$と定義する．点震源から平均２乗振幅$w(t)$のスカラー波が球対称に輻射される場合，共鳴角周波数ω_rを中心とする幅$\Delta\omega$の周波数帯での平均２乗振幅に対する輻射伝達方程式は，フーリエ領域における級数の形で，

$$\hat{\tilde{E}}(k,\omega)\approx\hat{w}(\omega)\hat{\tilde{G}}_1(k,\omega)\left[1+g_{1,0}V_0\hat{h}_s(\omega)\hat{\tilde{G}}_2(k,\omega)\left[1+g_{2,0}V_0\hat{h}_m\hat{\tilde{G}}_3\left[1+g_{3,0}V_0\hat{h}_m\hat{\tilde{G}}_4\left(1+g_{4,0}V_0\hat{h}_m\hat{\tilde{G}}_5\cdots\right)\right]\right]\right]$$

と書くことができる．ここで hat と tilde は時間と空間座標のフーリエ変換を表す．この導出にあたっては，散乱点間隔が大きく遠方場近似（$(\omega_r/V_0)n^{-1/3}>>1$）が満たされなければならないことに留意する．図２に平均２乗振幅の時空間変化の両対数プロットを示すが，この解のコーダ波は直達波の着信より遅れて膨らみを持って減少し，空間分布は震源近くで散乱された波動がベル型の膨らみを生じる．

上記の数学的モデルでは同一形状の低速度球体が分布すると考えたが，より現実的なモデルとしてベキ乗型のサイズ分布などを考えていくことが必要であろう．また，高次の非等方散乱を考慮することや弾性論的な取り扱いを考えていくことも重要である．

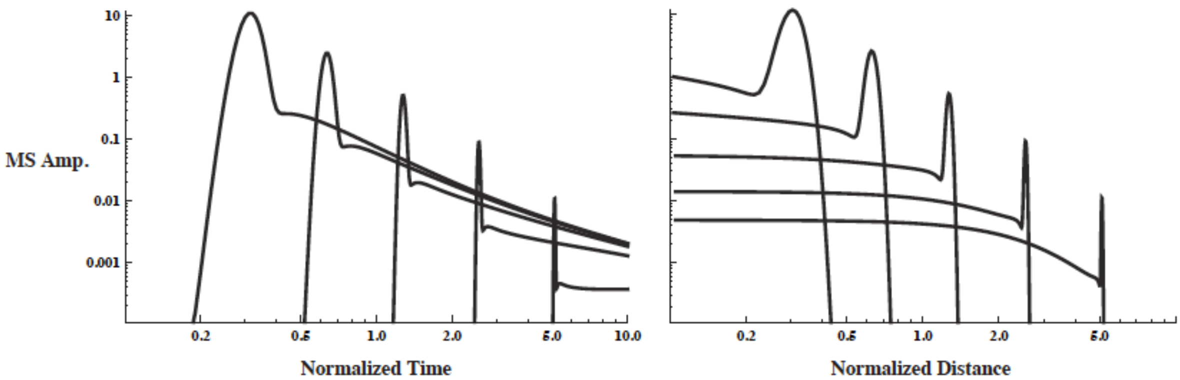

図 2：平均２乗振幅の時空間変化の両対数プロット（$\Delta\omega$はオクターブ幅，規格化した遅れ時間$\overline{\tau}=0.12$，輻射波の時間幅$\overline{t}_W=0.06$）．

Sato, H. and T. Hayakawa, *Geophys. J. Int.* (2014) Radiative transfer theory for a random distribution of low velocity spheres as resonant isotropic scatterers, 199, 41-59.