震源イメージングに対する点広がり関数：相反性による地震波干渉法とのリンク

中原　恒（東北大学大学院理学研究科），Matthew HANEY（アラスカ火山観測所）

１．はじめに

近年，地震の震源イメージングにおいて，波形インバージョン法 [例えば Hartzell and Heaton (1983)] に加えて，バックプロジェクション（BP）法 [例えばIshii et al. (2005)]，時間反転（TR）法 [例えばLarmat et al. (2006)]，ハイブリッドバックプロジェクション（HBP）法 [Yagi et al. (2012)] などの手法が適用されている．また，それらの手法間の理論的な関係も明らかにされている [例えば Kawakatsu and Montagner (2008), Fukahata et al. (2014)]．本研究では，光学分野で用いられている点広がり関数 (Point Spread Function; PSF) の概念を使えば，震源イメージングの物理的意味を理解しやすくなることを示す．またグリーン関数の相反性を利用すれば，震源イメージングのPSFは，地震波干渉法の問題として解釈できることを示す．

２．定式化

ここでは，シングルフォースの場合の結果を示すが，モーメントテンソルの場合についても定式化を終えている．まず，震源インバージョンとは，観測される波動場から，既知のグリーン関数を用いて，震源特性を推定することであり，その基礎となる観測方程式は以下の表現定理に基づいている：

$$u_n(\mathbf{x},\omega) = \iint \sum_i f_i(\boldsymbol{\xi},\omega) G_{ni}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega)\, d\boldsymbol{\xi}. \qquad (1)$$

これは周波数領域での表現で，u_nが観測変位のn成分，f_iが力源スペクトル，G_{ni}がグリーン関数, ωは角周波数である．震源インバージョンは，震源過程解析の正攻法と考えてよいと思うが，もう少し簡略化された震源イメージング法もあり，BP法，HBP法，TR法などがこれにあたる．Claerbout (2001)の物理探査の教科書によれば，イメージングとは，観測方程式にグリーン関数のアジョイントをかける操作として数学的に定義されており，震源イメージは以下のように表現される：

$$\begin{aligned} b_j(\boldsymbol{\xi}',\omega) &\equiv \iint \sum_n G^*_{nj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}',\omega) u_n(\mathbf{x},\omega)\, d\mathbf{x} \\ &= \iint f_i(\boldsymbol{\xi},\omega) \left[\iint \sum_n G^*_{nj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}',\omega) G_{ni}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega) d\mathbf{x} \right] d\boldsymbol{\xi} \,. \qquad (2) \\ &= \iint f_i(\boldsymbol{\xi},\omega) \Gamma_{ji}(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi},\omega) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

ただし，

$$\Gamma_{ji}(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi},\omega) \equiv \iint \sum_n G^*_{nj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}',\omega) G_{ni}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},\omega) d\mathbf{x} \qquad (3)$$

である．つまり，各観測点の波動場とグリーン関数との相互相関をとり，それをすべての観測点と成分について重合したものが，震源イメージである．この震源イメージが，観測点数の制限や分布の片寄りなどのため，どれだけ真の震源過程からずれる（ぼける）かを示すのがPSFであり，（3）式で表現される．このPSFは，観測点から震源の２点までのグリーン関数の相互相関をすべての観測点と成分について重合したものとして，表現することができる．モーメントテンソルに対しては，表現はもっと複雑になるが，定式化が可能である．

有限個の震源と観測点が離散的に分布しているとすれば，観測方程式を行列で書き下せる：

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{f}\,. \qquad (4)$$

uはデータベクトル，**f**は震源のモデルベクトル，**G**はグリーン関数からなる行列である．正規方程式の導出には，観測方程式の両辺にグリーン関数の随伴行列（アジョイント）$\mathbf{G}^\dagger$をかければよい：

$$\mathbf{G}^\dagger\mathbf{u} = \mathbf{G}^\dagger\mathbf{G}\mathbf{f}\,. \qquad (5)$$

この式の左辺が震源イメージである：

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{u} = (\mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{G})\,\mathbf{f}\,. \quad (6)$$

ここで，$\mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{G}$はPSF行列と解釈できる．正規方程式を解くことが震源インバージョンであり，そのダンピング付の解は

$$\hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{G} + \varepsilon^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^{\dagger}\mathbf{G}\mathbf{f} \qquad (7)$$

となる. つまり, インバージョンとは, PSF行列の逆行列をかけてその影響を補正することによって，真の震源過程を推定することを意味する．一方，その他の震源イメージングの手法では，PSFの影響を補正できていないことになり，この影響によるゴーストに注意する必要がある．

３．PSFの地震波干渉法による解釈

震源イメージングのPSFをさらに物理的に解釈する．そのため，理想化された状況ではあるが，図1 (左) のように観測点が震源をぐるりと取り囲むように連続的に分布していると仮定する. ここで，点広がり関数は，震源の2点へのグリーン関数の相互相関を全観測点と全成分について重合したものであることを思い出そう．グリーン関数の相反性を利用すると，震源と観測点とを入れ替えることができ，点広がり関数は，図1（右）のようにぐるりと取り囲んだ震源に対して2点の観測点間の波形の重合された相互相関を求める問題に置き換えることができる．これは地震波干渉法によるグリーン関数復元の問題と完全に等価である．これにより，震源イメージングの点広がり関数は，地震波干渉法の問題として解釈可能になる．シングルフォースの場合は，以下のようになる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{ji}(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi},\omega) &\equiv \iint \sum_n G_{in}(\boldsymbol{\xi},\mathbf{x},\omega)G^*_{jn}(\boldsymbol{\xi}',\mathbf{x},\omega)\,d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\rho\omega}\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{Im}\,G^P_{ji}(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi},\omega) + \frac{1}{\beta}\mathrm{Im}\,G^S_{ji}(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi},\omega)\right)\end{aligned}. \qquad (8)$$

ここで，ρ,α,βはそれぞれ媒質の密度，P波速度，S波速度，G^P_{ji},G^S_{ji}はグリーン関数のP波,S波部分である．最後の等式はSanchez-Sesma et al. (2008)の結果を援用している．点広がり関数は，2点間のグリーン関数の虚部を用いて表現できることが分かる．また，震源イメージは，真の震源過程にローパスフィルターをかけた結果になることが示唆される．

４．まとめ

震源イメージングの問題をPSFの概念を利用して考察した．その結果，震源インバージョンではPSFの影響を補正した震源イメージが得られること，他のイメージング手法ではPSFの影響が残るため，データの適切な重みづけを行うなどゴーストの影響に注意する必要があることが分かった．また，グリーン関数の相反性を利用すると，PSFは地震波干渉法の問題として解釈可能であることも明らかになった．本研究は，震源インバージョン法の意味をよく理解する上で有益であろう．

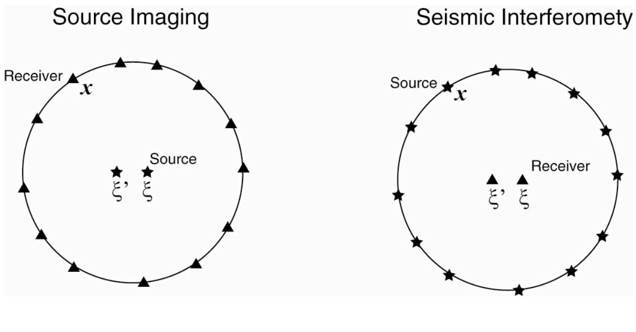

図1　震源イメージングの問題（左）と地震波干渉法の問題（右）．