

# 大規模地震動シミュレーションに向けた曲線座標系差分法

前田 拓人 (東京大学地震研究所)

## 1. はじめに

地震波伝播シミュレーションに広く用いられている差分法は、空間を波長あたり 5–10 格子以上に細かく分割し、運動方程式を離散的に解く方法である。この方法は比較的簡便であり、大規模な並列シミュレーションにも向いた方法である。しかし、浅部の地震波速度の遅い堆積層はきわめて細かい空間格子を要求するが、格子が小さくなると深部の高速度領域の離散か安定条件を満たすのが困難になる。そのため、数十～数百 km スケールの計算においては、深さに依存する地震波速度構造のために波長帯域が広く、計算領域全体を一樣な格子間隔で覆うのは不経済である。この問題に対処するため、浅部と深い部分で異なるサイズの格子を用い、それらを空間補間で繋ぐ不連続格子法 (Aoi and Fujiwara, 1999; Lee et al., 2008) や深さ方向にのみ格子サイズを柔軟に変更可能な手法 (Pitarka, 1999; Moczo, 1989) が提案されている。本報告では、深さとともになめらかに格子間隔が全方位に広がるような一般的な座標変換を用いた運動方程式を用い、曲線座標系差分法によってそれを解く手法を提案する。

## 2. 曲線座標系差分法

曲線座標系差分法は、実空間  $O(xyz)$  を任意の形状の持つ仮想的な計算座標系  $O(\xi\eta\zeta)$  に座標を変換し、その座標系で等間隔な格子により差分法を解くという手法である。このとき、運動方程式に現れる空間微分は、チェイン・ルールによりたとえば

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (1)$$

のように変換される。座標系同士の偏微分係数は座標変換の Jacobian を用いて表現することができる (e.g., Hestholm, 1999)。この方法は座標変換によって任意の形状を導入することができる一方、偏微分係数の計算ならびに保持のために計算負荷がきわめて大きくなってしまふ。そこで、偏微分係数の計算負荷をできるだけ小さくしつつ所望の座標系形状を実現するため、以下のような座標変換を考案した。

$$x(\xi, \zeta) = f(\xi)\xi, \quad y(\eta, \zeta) = f(\zeta)\eta, \quad z(\zeta) = \int_0^\zeta f(\xi') d\xi' = F(\zeta). \quad (2)$$

この変換(2)は拡大率関数  $f(\xi)$  を用いて水平方向の拡大を行い、それに合わせて鉛直方向も座標軸を拡大するものである。この座標系は  $f(\xi)=1$  でデカルト座標系に一致する。この変換により運動方程式に現れる偏微分係数項はすべて 1 変数の関数もしくはそれらの組み合わせで表現されている。これは計算機上では 1 方向のみの配列の組で保持できるため、メモリへの負荷が大きく下がり、結果として計算効率が劇的に改善することが期待される。ただし、本手法は実空間の差分法と比べてより多数の方向への空間微分を評価する必要がある。そこで、本報告では速度ならびに応力の全成分がそれぞれ同じ場所におかれたコロケート型格子 (e.g., Saenger et al., 2000; Fig. 1) を採用した。この方法では、空間微分は常に周辺 8 点 (2 次元ならば 4 点) の情報を用いた中心差分によって評価される。

### 3. 安定条件

次に、この曲線座標系における差分法の安定性を評価した。運動方程式に実空間における平面波を代入し、空間変数の独立変数を曲線座標系  $(\xi, \eta, \zeta)$  に変換、さらに曲線座標系における差分式を当てはめて Taylor 展開を行い整理することで、離散化に伴う分散関係と安定条件が得られる。計算過程は煩雑ではあるが、最終的に 3 次元弾性体に対する分散関係が得られた。そこからあらゆる波数成分に対して成立する安定条件として、

$$\Delta t \leq \frac{f(\zeta)}{v_{\max}} \left[ \frac{1}{\Delta \xi^2} + \frac{1}{\Delta \eta^2} + \left\{ \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \left( \frac{|\xi|}{\Delta \xi} + \frac{|\eta|}{\Delta \eta} \right) + \frac{1}{\Delta \zeta} \right\}^2 \right]^{-1/2} \quad (3)$$

が導出される。本条件は  $f(\zeta)=1$  で通常のカーテシアン座標系における差分法の安定条件に一致する。新たに導出された曲線座標系の安定条件には、通常の差分法で現れる格子間隔から定まる安定条件だけではなく、座標軸が直交しない座標系の変形に伴う項が現れる。特に今回提案した座標系においては、座標中心から水平方向に離れる  $(|\xi|, |\eta| \rightarrow \text{大})$  ほど座標系のゆがみが大きくなり、結果として安定条件に制約がかかることに注意が必要である。

### 4. シミュレーション

実際に本手法に基づき 2 次元 P-SV ならびに 3 次元地震動シミュレーションコードを実装し、実行試験を実施した。拡大率はなめらかでありさえすれば任意の関数が利用可能であるが、ここでは幾つかの試行の結果座標系形状を定める拡大率関数として  $\arctan$  型の関数を採用した (Fig. 2)。この座標系は浅部ではデカルト座標系、深部でも  $w$  倍されたデカルト座標系に漸近し、その間は深さ相当座標  $\zeta = \zeta_0$  周辺にて距離スケール  $L_c$  でなめらかに繋がれている。同様の特性は双曲線関数や Gauss の誤差関数でも実現可能であるが、 $\arctan$  型の関数は深さ方向微分値が最も小さく、(7)式の安定条件を相対的に満たしやすい。

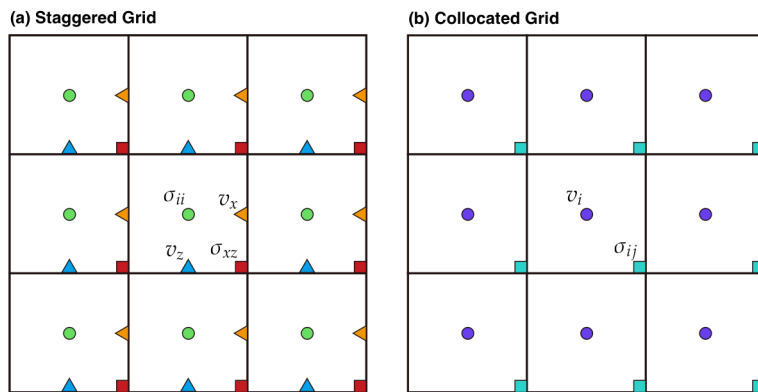
この座標系に基づき、Maeda et al. (2013)での大規模地震動シミュレーションに用いられたコードに相当する、2次元・3次元の一般化 Zener 粘弾性体中の運動方程式の差分法大規模並列計算ソフトウェアを作成した。複雑形状をした計算領域の端から特徴的な反射波が現れたが、これに対しては Multiaxial-PML (Meza-Fajardo and Papageorgiou, 2008)を採用することで高性能かつ安定な無反射境界を実現した。図 3 に 2 次元均質媒質中の試験計算のスナップショットを示す。予備的な試験計算の結果、浅い部分から急峻に格子間隔が大きくなるような座標においても安定した計算が可能であることが確かめられた。このことは今後地震動シミュレーションを用いた不均質構造解明の一助となると期待される。

本提案手法を用いたシミュレーションは、計算が複雑化し計算量が増えたにも関わらず、同じ格子数を用いた通常の差分法計算と比べてほとんど計算時間の増大が見られなかった。これは現在の計算機における地震波計算は計算そのものよりもメモリと CPU の間の通信性能が律速しているため (井上・他, 2013) であろう。本手法は必要とされる記憶容量をほとんど増大させないまま計算手法を高度化しているため、計算時間の実質的な増大無しに高精度な結果が得られるという好ましい特性を持ったと考えられる。

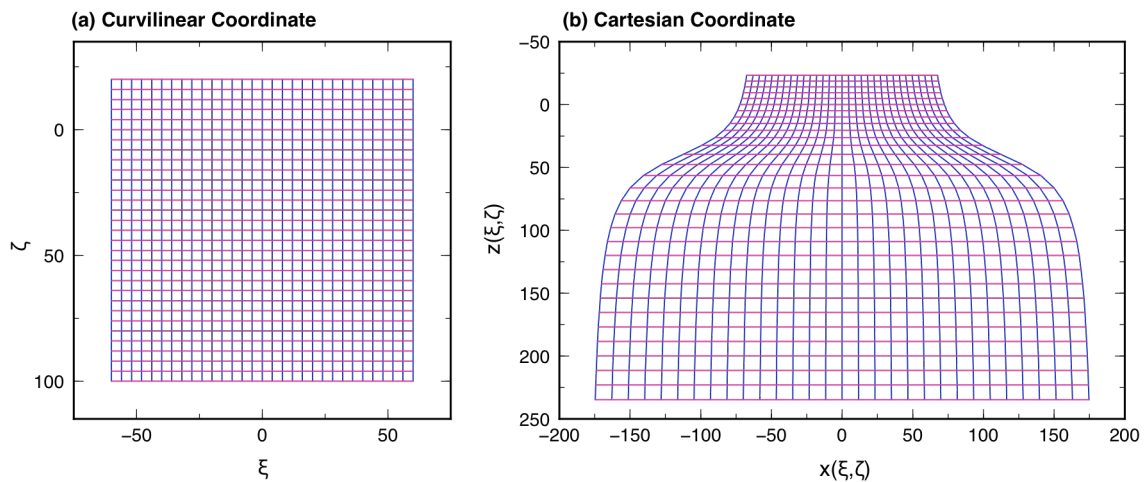
その一方、(6)式の安定条件は 2 次元より 3 次元でより厳しくなる。特に水平方向の空間距離範囲が一定以上になる大規模シミュレーションでは座標のゆがみに起因する安定条件が計算全体を律速してしまい、本手法が適さなくなるという制限も明らかになってきた。しかし、これは座標系の選択に依拠した問題であり、今後より適切な座標系の探索により安定条件を緩和することで、さらなる大規模計算への道が開けると期待される。

### 謝辞

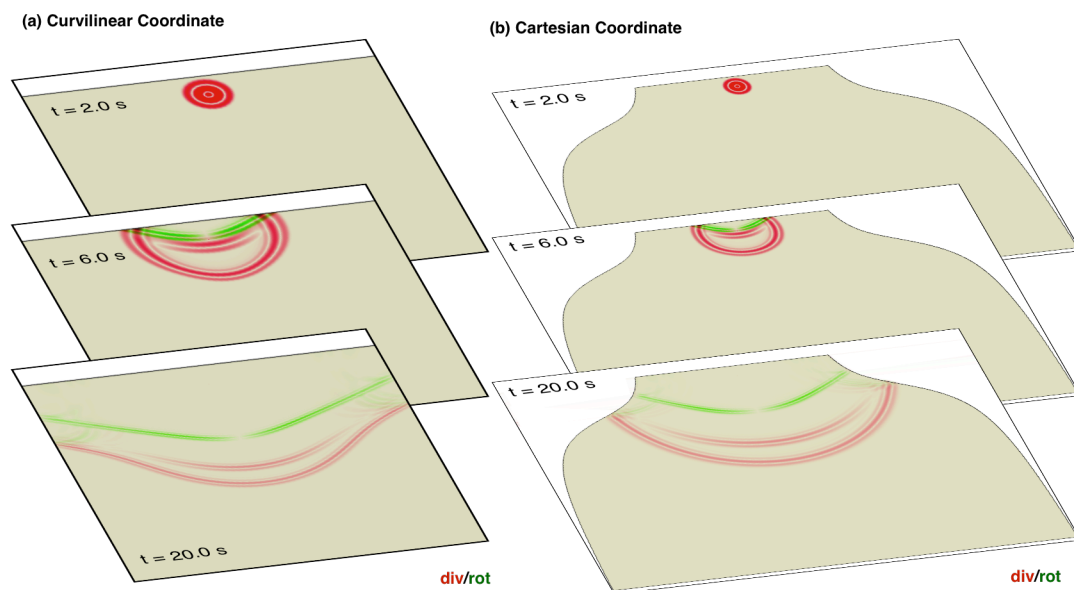
本研究のために東京大学地震研究所地震火山情報センターの計算機システムを利用しました。



**Figure 1.** (a)通常の差分法のスタガード格子と、本報告で採用したコロケート格子のグリッドレイアウトの比較。黒太線が単一の格子内で表現される変数の境界を、●・■印がそれぞれ各変数の配置位置を表す。



**Figure 2.** arctan 型拡大率関数を用いた計算に用いた座標系における等間隔格子(a)と、そのデカルト座標系における形状。



**Figure 3.** 2次元 P-SV 座標系における曲線座標系シミュレーションの計算例。計算された速度場の発散(赤)と回転場(緑)の絶対値を、それぞれ(a)計算に用いた曲線座標系と(b)それをカーテシアン座標系に投影補間した座標系で表示した。