Reversible Jump MCMC を用いたランダム速度不均質構造の推定
Random Inhomogeneity Imaging with Reversible Jump MCMC

高橋 努（独立行政法人海洋研究開発機構）

1. はじめに

逆問題では未知数の数が未知である場合が多く，例えば地下構造イメージングでは十分な数の未知数を配置し，空間分布の平滑化などの拘束条件のもと最適解を推定する．しかしデータ密度や空間分布の滑らかさが著しく変化する場合などは，その手法の適用は難しくなると予想される．Green (1995)は，マルコフ連鎖モンテカルロ法（以下 MCMC）を用いたベイズ推論を異なる次元のモデル空間なども含む一般的な場合へと拡張し，様々なモデルを含む集合を対象にサンプリングを行う手法（Reversible Jump MCMC, 以下 RJMCMC）を提案した．この手法により，データに基づいて未知数の数を適応的に変えることも可能となり，Voronoi 分割などを利用することで未知数の空間配置も適応させることができる．これまでの地下構造研究においても，比抵抗構造の推定(Malinverno, 2002)や表面波トモグラフィ(Bodin & Sambridge, 2009)などに RJMCMC が適用されてきた．また Simulated Annealing（SA）に RJMCMC を用いた最適化法も提案され(e.g., Andrieu et al. 2000)，RJMCMC を用いた手法は広い分野で適用されている．本研究では RJMCMC を用いた SA をランダム速度不均質構造の推定に適用し，平滑化の拘束条件を与えずに西南日本や南海トラフにおける構造を推定した．

2. Reversible Jump MCMC

MCMC は，対象とする確率分布に対して「確率の大きな方へ移動し，確率が大きくなったらその近傍をうろうろする」手法であり，ベイズ推論では事後確率を対象とする．未知数の数 n が不変の場合，パラメータベクトル $\mathbf{x}$ の事後確率は事前分布と尤度関数により $p(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{d}_{obs}) = p(\mathbf{d}_{obs}\,|\,\mathbf{x})p(\mathbf{x})/p(\mathbf{d}_{obs})$ と表現される．サンプリングのアルゴリズムとして多く用いられる Metropolis & Hastings 法は，乱数 $\mathbf{u}$ を用いて $\mathbf{x}$ から $\mathbf{x}'$を生成し，$\mathbf{x}'$を受け入れるかどうかを確率的な方法で判定する．RJMCMC は，この Metropolis & Hastings 法による MCMC を，次元数 n などが変化する場合に拡張する． $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$の次元がそれぞれ n, n'と異なる場合でも，乱数 $\mathbf{u}$，$\mathbf{u}'$と $(\mathbf{x}',\mathbf{u}') = h(\mathbf{x},\mathbf{u})$，$(\mathbf{x},\mathbf{u}) = h^{-1}(\mathbf{x}',\mathbf{u}')$ となる微分可能な h, h^{-1} を定義することで, n が不変の場合と同様の定式化をすることができる. 次元 n の変化の有無にかかわらず, $\mathbf{x}'$を受け入れる遷移確率 α は,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \min\left\{1, \frac{p(\mathbf{d}_{obs}\,|\,\mathbf{x}',n')}{p(\mathbf{d}_{obs}\,|\,\mathbf{x},n)} \frac{p(\mathbf{x}'|\,n')p(n')}{p(\mathbf{x}\,|\,n)p(n)} \frac{g(\mathbf{u}')}{g(\mathbf{u})} \left|\frac{\partial(\mathbf{x}',\mathbf{u}')}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{u})}\right| \right\} \\
&= \min\{1, (\text{likelihood ratio}) \times (\text{prior ratio}) \times (\text{proposal ratio}) \times (\text{Jacobian})\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と表現される(Green, 1995; 2003).

3. ランダム媒質中を伝播する波のピーク遅延時間

ランダム速度不均質構造の推定は Takahashi et al. (2009)の手法に基づいて行う．地下の媒質がランダムな速度ゆらぎを持ち，そのゆらぎが von Karman 型のパワースペクトル密度関数

$$P(m)=\frac{8\pi^{3/2}\varepsilon^2 a^3\,\Gamma(\kappa+3/2)}{\Gamma(\kappa)\left(1+a^2m^2\right)^{\kappa+3/2}}, \tag{2}$$

で特徴付けられると仮定する．ここで a は特徴的スケール，ε はゆらぎの RMS 値，κ は高波数域におけるスペクトルの勾配を決めるパラメータである．地震波の波長が a に比べて短く，波の伝播距離が a に比べて十分長いとき，前方散乱が卓越し，直達波付近の波群は放物型波動方程式のマルコフ近似[e.g., Sato 1989]によって表現することができる．von Karman 型のランダム媒質中において，初動到達から最大振幅到達までの時間差として定義されるピーク遅延時間（t_p）は，伝播距離 r と中心周波数 f の関数として以下のように表現することができる．

$$t_p = N_p(\kappa,\varepsilon,a)\cdot f^{2M_p(\kappa)-4}\cdot r^{M_p(\kappa)}, \tag{3}$$

$$M_p(\kappa)=1+2/p(\kappa), \tag{4}$$

$$N_p(\kappa,\varepsilon,a)=b_p(\kappa)\left(\frac{C(\kappa)^{2/p(\kappa)}}{2}V_0^{1-4/p(\kappa)}\left(\varepsilon^{\frac{2}{p(\kappa)-1}}a^{-1}\right)^{2-\frac{2}{p(\kappa)}}(2\pi)^{-2+\frac{4}{p(\kappa)}}\right). \tag{5}$$

Takahashi et al. (2008)に従い，波線経路に沿って $P(m)$が区分的に変化する場合を考えると，κ と $\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}$ を未知数として，ピーク遅延時間の観測値と各観測点での t_p の周波数依存性から二つの未知数の空間分布を求めることができる．

4. RJMCMC for t_p inversion

以下では表記の簡略化のため，$(x,y)=\left(\kappa,\log\left(\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}\right)\right)$とする．二つのパラメータ (x,y) の空間分布を求めるため，空間を離散 Voronoi diagram により離散化する．通常の Voronoi diagram は空間に母点を配置し，母点に対する距離に基づき空間を分割するが，離散 Voronoi diagram では最小の cell サイズを N_max 個だけ予め空間に配置し，最も近い母点へ所属させる．母点の数を n とし，個数の事前分布 $p(n)$は最大個数 N_max から最小個数 N_min までの一様分布 $p(n)=1/\Delta n=1/(N_\mathrm{max}-N_\mathrm{min})$を仮定する．二つのパラメータ (x,y)はそれぞれの下限から上限までの一様分布を仮定する． x と y の取り得る値の範囲をそれぞれ Δx と Δy とすると，$\mathbf{x}$ の事前分布は $p(\mathbf{x}\mid n)=(1/\Delta x)^n(1/\Delta y)^n$ となる．各パラメータの下限と上限は，モデルの制約やこれまでの研究結果を考慮し，κ は 0.1~0.9， $\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}$ は $10^{-6}\sim10^{-2}$ [m^{-1}]とした．

Green (1995)に従い，以下では次元の増加を BIRTH, 減少を DEATH と表現する．本研究

では，RJMCMC によるサンプリングを BIRTH, DEATH そしてランダムウォークによるパラメータの更新（UPDATE）をそれぞれ確率 P_b, P_d, P_u でランダムに繰り返すこととした．

BIRTH で新しい母点を導入すると，その母点の周囲の Voronoi cell の体積も変化する．BIRTH により周囲の cell の体積が s_i+t_i から t_i に変化し，新しい cell の体積が $\sum s_i$ で与えられるとする．新しい cell 中のパラメータ(x^*, y^*)は，重み付き平均と密度関数 g_u, g_v により生成される乱数 u, v により，

$$\left(x^*, y^*\right)=\left(\frac{1}{\sum_k s_k}\sum_i s_i x_i + u,\ \frac{1}{\sum_k s_k}\sum_i s_i y_i + v\right) \tag{6}$$

とした．また体積が変化する周囲の cell ではパラメータ(x, y)は変化しないとした．DEATH はこの逆関数として与える．これらの BIRTH, DEATH に対する Jacobian はともに 1 となる．

以上から，BIRTH における遷移確率 α は，N-n 個の候補から新しい母点を選び，n 個の母点の配置は$\dfrac{N_{\max}!}{n!\left(N_{\max}-n\right)!}$通りあることを考慮すると，

$$\begin{aligned}\alpha_{BIRTH} &= \min\left\{1, \frac{p(\mathbf{d}_{obs} \mid \mathbf{x}', n')}{p(\mathbf{d}_{obs} \mid \mathbf{x}, n)} \frac{p(\mathbf{x}' \mid n')p(n')}{p(\mathbf{x} \mid n)p(n)} \frac{g(\mathbf{u}')}{g(\mathbf{u})} \left|\frac{\partial(\mathbf{x}', \mathbf{u}')}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{u})}\right|\right\} \\ &= \min\left\{1, \frac{p(\mathbf{d}_{obs} \mid \mathbf{x}', n')}{p(\mathbf{d}_{obs} \mid \mathbf{x}, n)} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{g_u(u')g_v(v')}{g_u(u)g_v(v)}\right\}\end{aligned}, \tag{7}$$

となり，DEATH も同様に，

$$\alpha_{DEATH} = \min\left\{1, \frac{p(\mathbf{d}_{obs} \mid \mathbf{x}', n')}{p(\mathbf{d}_{obs} \mid \mathbf{x}, n)} \frac{\Delta x \Delta y}{1} \frac{g_u(u')g_v(v')}{g_u(u)g_v(v)}\right\}, \tag{8}$$

となる．

尤度関数は，t_p の残差二乗和と，観測点毎に得られる t_p の周波数依存性を表す係数 B_{freq} の残差二乗和から構成した．ここで B_{freq} は$\log\left(t_p[f\ \mathrm{Hz}]/t_p[f_{\mathrm{ref}}\ \mathrm{Hz}]\right)=A_{\mathrm{freq}}+B_{\mathrm{freq}}\log f$による回帰係数である．また収束を安定させるため，$\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}$の分散を小さくする拘束条件を導入した． SA における温度 T を導入し，$p\left(d_{obs} \mid \mathbf{x}, n\right)$は

$$p\left(d_{obs} \mid \mathbf{x}, n\right)=\exp\left(-\left(\sum\left(t_p^{\mathrm{obs}}-t_p(\mathbf{x})\right)^2 + w_{B_{\mathrm{freq}}}\sum\left(B_{freq}^{obs}-B_{freq}\right)^2 + w_\varepsilon \sum\left(y-\bar{y}\right)^2\right)\Big/T\right), \tag{9}$$

とした．

5. 西南日本における適用例

この手法を西南日本及び南海トラフ周辺で得られた地震記録に適用した．解析に用いた

記録は，（独）海洋研究開発機構が文部科学省の受託研究「東海・東南海・南海地震の連動性評価のための調査観測・研究」の一環として日向灘周辺から東海沖で行った海底地震観測および（独）防災科学技術研究所の Hi-net・F-net 観測点で得られた微小地震の地震波形記録である．これらの記録から 4-8Hz, 8-16Hz, 16-32Hz の S 波のピーク遅延時間を測定し，解析を行った. 離散 Voronoi cell の最小サイズは水平方向 0.25°×0.25°, 深さ方向 20km とし，従来の解析[Takahashi et al. 2013]のブロックサイズと同じ大きさとした. 最小 cell の総数 $N_{\max}$ は 2880 個である．

解析の結果，九州や中国地方の火山地域ではパワースペクトルの勾配が緩やかで，速度不均質の短波長成分に富む媒質が推定された．また四国や四国沖の南海トラフは一様にスペクトルの勾配が急峻で，不均質性の弱い媒質が存在するという結果が得られた．これらの特徴は，交換モンテカルロ法（または，レプリカ交換モンテカルロ，パラレルテンパリング法）によって得られた従来の結果[Takahashi et al. 2013]と大局的に一致する．また，この構造は概ね n=15 個程度で表現されており，$N_{\max}$ に比べ非常に少ない個数で構造の特徴を表現できることも示された．一方，$\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}$ は従来の結果に比べ長波長での空間変化に富み，南海トラフ周辺では日向灘付近と紀伊半島付近でやや大きな値を示すという結果が得られた．

6. 議論

本研究では，パラメータの空間分布に対する平滑化の拘束条件を用いずに構造推定を行い，地震活動が低調でデータが疎な四国や四国沖において空間一様な弱い不均質を安定して推定することができた．またデータが密にある中国や九州地方では火山分布と対応した不均質の空間変化が明瞭にイメージされた．この結果は，データ密度や空間分布の滑らかさが著しく変化する場合でも，RJMCMC を用いることで安定した地下構造イメージングが可能になることを示していると考えられる．また本研究では，二つのパラメータが共通の Voronoi cell で表現できると仮定して解析を行った．その結果，$\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}$ は従来の手法に比べ長波長の構造変化に富み，従来の手法で南海トラフ周辺に推定されていた小さな anomalies は推定されなかった．これは，Voronoi cell の形状や配置が B_{freq} によって制約される κ の分布を強く反映し，$\varepsilon^{2/(p(\kappa)-1)}a^{-1}$ の空間変化を適切に推定できなかった可能性などが考えられる．今後，それぞれ独立の空間配置を持つ場合の解析など手法の高度化を進めるとともに，より小さな最小 cell サイズを用いた解析，プレート境界を考慮した cell の配置なども検討していきたいと考えている．