地震波干渉法により減衰構造を求めるための理論

中原　恒（東北大学大学院理学研究科）

A theory for estimating attenuation structures with seismic interferometry

Hisashi NAKAHARA (Graduate School of Science, Tohoku Univ.)

１．はじめに

近年，地震波干渉法を用いた地震波速度構造の推定が世界各地で行われるようになっている．地震波干渉法により求められた相互相関関数のフェイズの時刻の読み取りは，ノイズ源の分布に対して比較的ロバストであることが知られている（たとえばSnieder, 2004）．一方で，相互相関関数の振幅を用いて減衰構造を推定する手法も提案されているが（例えば，Prieto et al., 2009）が，その安定性に関してはまだよくわかっておらず，理論的・数値的な研究が進められているのが現状である（例えば，Tsai, 2011）．本研究では，減衰を推定するために，Prieto et al. (2009)により減衰性媒質に拡張されたSPAC法（Aki , 1957)の予測式について，その理論的な背景を明らかにすることを目的とする．

２．定式化

本研究では，まず減衰性無限不均質媒質に対して，地震波干渉法の証明を行った．証明の流れはSnieder (2007)と同じであるが，そこで使用されている減衰波動方程式に，さらに場に比例する項が付いた次の減衰波動方程式を用いている点が異なる：

$$\Delta G(\mathbf{r},t)-\left(\frac{1}{v(\mathbf{r})^2}\frac{\partial^2 G(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}+\frac{2\kappa(\mathbf{r})}{v(\mathbf{r})}\frac{\partial G(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\kappa(\mathbf{r})^2 G(\mathbf{r},t)\right)=\delta(\mathbf{r})\delta(t). \quad (1)$$

ここで，Gは減衰波動方程式のグリーン関数であり，$\mathbf{r}$ は空間，t は時間，$v(\mathbf{r})$ は速度，$\kappa(\mathbf{r})$ は減衰を表す．この減衰波動方程式では，Q値が周波数に比例する形となり，波形は減衰がない場合と同じで振幅のみが減少するため，解がとても単純な性質をもつ．ここで，相関型の表現定理を用いることで，周波数領域で以下の式を導出できる：

$$\mathrm{Im}\,G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\omega)=-\omega\int_V\left[\left(\frac{2\kappa(\mathbf{r}')}{v(\mathbf{r}')}\right)G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}',\omega)G^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}',\omega)\right]d\mathbf{r}'. \quad (2)$$

この式は，右辺の2点$\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$に対するグリーン関数の虚部が，左辺のノイズ源$\mathbf{r}'$に関して重み付き重合した相互相関関数に比例することを示しており，ノイズ源が減衰を補償するように分布する場合には，地震波干渉法が成立することを意味する．Snieder (2007)と異なる形の減衰性波動方程式に対しても，地震波干渉法が成立することを具体的に証明したのが本研究の成果である．

次に，この結果を用いて，地震波干渉法とSPAC法との理論的関係式の導出を試みた．SPAC法で重要な規格化されたクロススペクトルは次式で表わされる：

$$C_{1,2}(\mathbf{r},\omega)\equiv\frac{<u(\mathbf{r}_1,\omega)u^*(\mathbf{r}_2,\omega)>}{<|u(\mathbf{r}_1,\omega)|^2>}=\frac{<u(\mathbf{r}_1,\omega)u^*(\mathbf{r}_2,\omega)>}{<|u(\mathbf{r}_2,\omega)|^2>}. \quad (3)$$

ここで，分子に2観測点での波動場 u のクロススペクトル，分母にそれぞれの観測点での波動場のパワースペクトルが現れる．また$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$，$r=|\mathbf{r}|$で，＜＞はランダムなノイズ源分布に対するアンサンブル平均を意味する．地震波干渉法に基づくと，互いに独立なノイズ源が体積的に分布する場合，クロススペクトルは2点間のグリーン関数の虚部に比例し，パワースペクトルは震源と観測点が同じ

場合のグリーン関数の虚部に比例することになる：

$$\left\langle u(\mathbf{r}_1,\omega)u^*(\mathbf{r}_2,\omega)\right\rangle = -\frac{F(\omega)}{\omega}\operatorname{Im}G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\omega). \quad (4)$$

ただし，$F(\omega)$はノイズ源のパワースペクトルである．これを用いると，(3)は次のように書ける：

$$C_{1,2}(\mathbf{r},\omega) \equiv \frac{<u(\mathbf{r}_1,\omega)u^*(\mathbf{r}_2,\omega)>}{<|u(\mathbf{r}_1,\omega)|^2>} = \frac{\operatorname{Im}G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\omega)}{\operatorname{Im}G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_1,\omega)} = \frac{\operatorname{Im}G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\omega)}{\operatorname{Im}G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_2,\omega)}. \quad (5)$$

すなわち，地震波干渉法とSPAC法との間にはこのような理論的関係があり，それを用いると，規格化されたクロススペクトルがグリーン関数を用いて記述できる．

さらに以下では，均質な無限減衰媒質を考えることにする．その場合，減衰波動方程式に対するグリーン関数は，表面波の場合，周波数領域において，0次の第1種ハンケル関数$H_0^{(1)}(x)$を用いて表現できる（例えば，今村，1978）：

$$G(\mathbf{r},\omega) = -\frac{iH_0^{(1)}((k+i\kappa)r)}{4}. \quad (6)$$

ここで，減衰の影響で波数が複素数になっていることに注意する．これを(5)に代入すると，以下のようになる：

$$C_{1,2}(\mathbf{r},\omega) = \frac{\operatorname{Im}\left[iH_0^{(1)}((k+i\kappa)r)\right]}{\lim\limits_{r\to 0}\operatorname{Im}\left[iH_0^{(1)}((k+i\kappa)r)\right]} \quad .(7)$$

この厳密式に対して，

(1)減衰が弱いこと（$\kappa/k \ll 1$），
(2)観測点間距離が波長に比べて十分長いこと（$kr \gg 1$），

の２つの条件を付加すると，Prieto et al. (2009)の式：

$$C_{1,2}(\mathbf{r},\omega) = J_0(kr)\exp(-\kappa r) \quad (8)$$

を導出できることが示された（Nakahara, 2012）．ただし，$J_0(x)$は0次のベッセル関数である． 以上より，Prieto et al. (2009)の予測式は厳密解ではないが，無限均質媒質において，上の2つの条件を満たす場合の近似式であることが明らかになった．

３．まとめ

本研究では，減衰性無限媒質に対して地震波干渉法が成立することを証明し，地震波干渉法とSPAC法との理論的関係式を示した．その結果を用いて，Prieto et al. (2009)の式が，無限均質媒質における近似式であることを理解できた．最近では，Prieto et al. (2009)の式が減衰トモグラフィーに使用されているが，この式は比較的均質な媒質に適用すべきである．不均質な領域でトモグラフィーを行うことの妥当性はいまだ明らかではなく，今後さらなる理論的な検討が必要である．また，減衰のQ値の周波数依存性については, 本研究では限定された場合についてのみ証明が行われたにすぎない．Q値が任意の周波数依存性を持つ場合についても，今後の検討が必要である．