ノイズ相互相関からのグリーン関数抽出とエネルギー保存則

東北大学　佐藤春夫

2012 年 9 月 10 日

1　はじめに

ランダム波が等分配状態にあるとき，その相互相関関数からグリーン関数を導出することが可能であり，地震学においても雑微動解析による構造推定にしばしば用いられてきた (e.g. *Aki*, 1957; *Campillo and Paul*, 2003). 離散的な散乱体が分布するような時には，これらを取り囲むようにランダム波の震源が分布する場合や (*Wapenaar et al.*, 2010; *Snieder and Fleury*, 2010), 空間に一様に分布している場合 (*Margerin and Sato*, 2011a,b)，光学定理が成立することとグリーン関数の導出条件が等価であることが報告されている．

本稿では，二次元空間において，「任意の形状の散乱体（障害物）」と 2 観測点が，これらを囲む十分大きな円環上に分布するランダム波の震源によって照射されている時，その相互相関関数からグリーン関数を抽出するための条件を導くことにする．さらにその条件がエネルギー保存則と等価であることを示すことができる．

2　2 次元空間におけるスカラー波のグリーン関数

二次元空間において，外力 N が与えられた場合，実スカラー波 $u(\mathbf{x},t)$ は

$$[\Delta - \frac{1}{V_0^2}\partial_t^2]u\,(\mathbf{x},t) + L_j(\partial_t^2,\mathbf{x})u\,(\mathbf{x},t) = N(\mathbf{x},t) \tag{1}$$

に従う．ここで，V_0 は背景速度，L_j は座標原点付近に存在する障害物（散乱体） j を表す．角周波数領域では，グリーン関数は

$$[\Delta + k_0^2]\widehat{G}(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\omega) + L_j(-\omega^2,\mathbf{x})\widehat{G}(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\omega) = \delta(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \tag{2}$$

に従う．ここで $k_0 = \omega/V_0$ とする． 一様媒質の場合，遠方で輻射条件を満たすグリーン関数は，$\widehat{G}_0(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\omega) = \frac{-i}{4}H_0^{(1)}(k_0|\mathbf{x}_A-\mathbf{x}_B|,\omega)$ である．震源が B の場合，障害物 j の外側では，観測点 A における波は外向波 $H_l^{(1)}(k_0 r_{Aj})e^{il\theta_{Aj}}$ の重ね合わせで表される．一方，震源が A の場合，障害物 j の外側では，観測点 B における波は $H_l^{(1)}(k_0 r_{Bj})e^{il\theta_{Bj}}$ 重ね合わせで書ける．これらをまとめると，グリーン関数は，第一種ハンケル関数の二重展開で，

$$\begin{aligned}\widehat{G}(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\omega) &= \widehat{G}_0(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\omega) + \widehat{G}_S(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\omega)\\ &= \frac{-i}{4}H_0^{(1)}(k_0 r_{AB}) + \sum_{l,m=-\infty}^{\infty}\frac{-i}{4}H_l^{(1)}(k_0 r_{Aj})F_{lm}(\omega)\frac{-i}{4}H_m^{(1)}(k_0 r_{Bj})e^{il\theta_{Aj}+im\theta_{Bj}}\end{aligned} \tag{3}$$

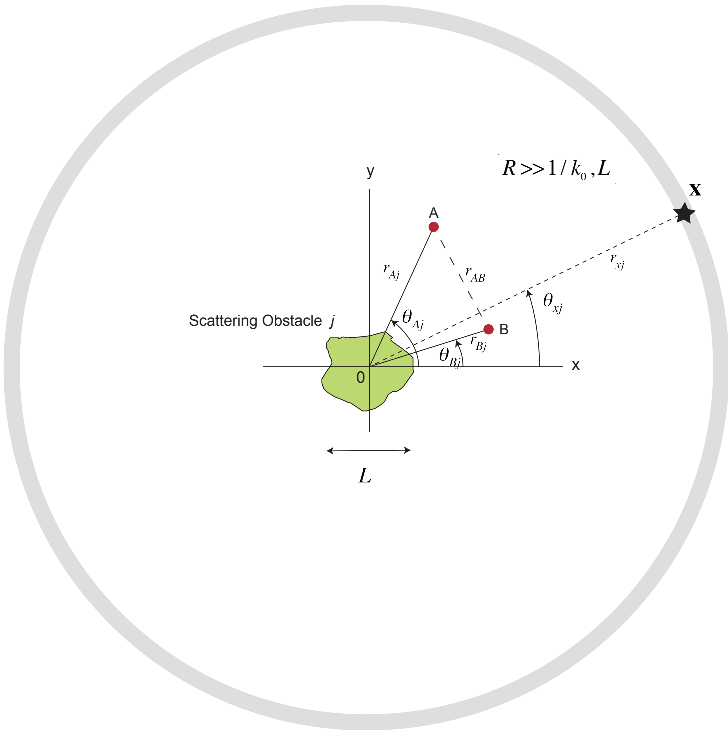

図 1　散乱体 j と観測点 A と B は，十分大きな半径の円環の上に分布する互いに無相関な定常ランダム震源によって照射されている．

と書ける．以下では，同じ添字について和をとることとし，和記号は明示しない．震源観測点の相反定理から $F_{lm} = F_{ml}$ である．この解は遠方で輻射条件 $\lim_{r\to\infty} r(ik_0\widehat{G} - \partial_r G) = 0$ を満たす．展開係数 F_{lm} は障害物 L_j の境界条件を用いて求めることができるが，ここでは具体的な形は求めない．

3　相互相関関数からグリーン関数の導出

十分大きな半径 R の円環上に分布する互いに無相関な定常ランダム震源のアンサンブル $\{N\}$ を考える．ここで，$R \gg L, r_{Aj}, r_{Bj}, 1/k_0$ とする． 観測点 A と B におけるランダム波の相互相関関数 (CFF) のアンサンブル平均は，

$$\begin{aligned}\langle C_u(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \tau)\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau} \oint_R \widehat{G}\,(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}, \omega)^*\, dl(\mathbf{x}) \oint_R \widehat{G}\,(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}', \omega)\, \delta\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\, \widehat{S}_N\,(\omega)\, dl(\mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega\tau} I(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \omega)\widehat{S}_N\,(\omega) \qquad (4)\end{aligned}$$

と書ける．ここで $\widehat{S}_N\,(\omega)$ は震源のパワースペクトル密度であり，円環上の線積分

$$I(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \omega) \equiv \oint_R \widehat{G}\,(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}, \omega)^*\, \widehat{G}\,(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}, \omega)\, dl(\mathbf{x}) \qquad (5)$$

は，異なる線分からの波動が無相関であることを意味する．ここで，関係

$$\oint_R \widehat{G}\left(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}, \omega\right)^* \widehat{G}\left(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}, \omega\right) dl(\mathbf{x}) = \frac{i}{2k_0}\left[G\left(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \omega\right) - G\left(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \omega\right)^*\right] \tag{6}$$

が成立する場合，CCF の時間微分は遅延グリーン関数の反対称和

$$\frac{d}{d\tau}\left\langle C_u(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \tau)\right\rangle = \frac{V_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[G\left(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \tau-\tau'\right) - G\left(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, -\tau-\tau'\right)\right] S_N\left(\tau'\right) d\tau' \tag{7}$$

で表される．すなわち，式 (6) がグリーン関数抽出のための条件である．以下では，式 (3) における展開係数 F_{lm} に帯する条件を求めることにする．

式 (6) の右辺に現れる差は，

$$\begin{aligned}\widehat{G}(AB) - \widehat{G}(AB)^* = \frac{-i}{2}J_0(AB) - \frac{1}{16}H_l^{(1)}(Aj)F_{lm}H_m^{(1)}(Bj)e^{il\theta_{Aj}+im\theta_{Bj}} \\ + \frac{1}{16}H_l^{(2)}(Aj)F_{lm}^*H_m^{(2)}(Bj)e^{-il\theta_{Aj}-im\theta_{Bj}}\end{aligned} \tag{8}$$

と書ける．以下では，$\widehat{G}_0(r_{Bx})$ を $\widehat{G}_0(Bx)$ ， $H_l^{(1)}(k_0 r_{xj})$ を $H_l^{(1)}(xj)$ と略記することにする．

$r_{xj} > r_{Bj}$ の場合， Graf の加法定理を用いれば，

$$\widehat{G}_0(Bx) = \frac{-i}{4}H_l^{(1)}(xj)J_l(Bj)\cos l(\theta_{Bj} - \theta_{xj}), \tag{9}$$

すなわち，$\widehat{G}_0(Bx)$ はあたかも散乱体 j からの散乱波 $\frac{-i}{4}H_l^{(1)}(xj)$ の和として書くことができる．これを用いて, 式 (6) の左辺の線積分を実行する．円環の半径 R が波長に比べて十分大きいとき, $H_m^{(2)}(k_0R)H_m^{(1)}(k_0R) \approx \frac{2}{\pi k_0 R}$ であることを用い，式 (8) を用いて整理すると，

$$\begin{aligned}\int_R dl(\mathbf{x})\widehat{G}(Ax)^*\widehat{G}(Bx) = \frac{i}{2k_0}[\widehat{G}(AB) - \widehat{G}(AB)^*] + \frac{1}{32k_0}e^{-il\theta_{Aj}+im\theta_{Bj}}H_l^{(2)}(Aj)H_m^{(1)}(Bj) \\ \times [i(-1)^m F_{l,-m}^* - i(-1)^l F_{m,-l} + \frac{1}{2}F_{ln}^*F_{mn}].\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．すなわち，式 (6) を満たすには，

$$i(-1)^l F_{m,-l} - i(-1)^m F_{l,-m}^* = \frac{1}{2}F_{ln}^*F_{mn} \tag{11}$$

でなければならない．

4　エネルギー保存則と光学定理

角周波数領域では，エネルギー流束密度は $\widehat{M}_i = -i\omega\frac{V_0^2}{2}(\hat{u}^*\partial_i\hat{u} - \hat{u}\partial_i\hat{u}^*)$ で与えられる． 震源 B と散乱体 j を取り囲む円環上でエネルギー流束密度 $\widehat{M}_i$ の線積分

$$\oint_R dl(\mathbf{x})\ \widehat{M}_i(\widehat{G}(xB))n_i = -i\frac{\omega V_0^2}{2}\oint_R dl(\mathbf{x})n_i[\widehat{G}(xB)^*\partial_i\widehat{G}(xB) - \partial_i\widehat{G}(xB)^*\widehat{G}(xB)] \tag{12}$$

は全エネルギー流束を与える．ここで， n_i は円環の外向きの単位法線ベクトルである. 式 (2) を用いれば，この積分は，

$$\oint_R dl(\mathbf{x})\ \widehat{M}_i(\widehat{G}(xB))n_i = i\frac{\omega V_0^2}{2}[\widehat{G}(BB) - \widehat{G}(BB)^*] \tag{13}$$

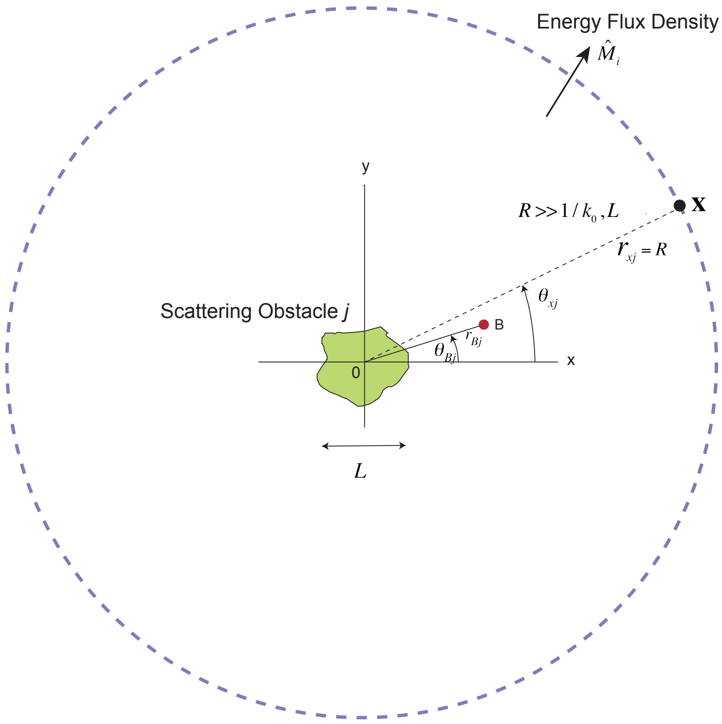

図 2　震源 B と散乱体 j を取り囲む円環上でエネルギー流束密度 $\widehat{M}_r$ の線積分は全エネルギー流束を与える．

でなければならないことがわかる．十分遠方 $R >> 1/k_0$ で輻射条件を満たすことを用いれば，式 (12) 右辺は

$$\oint_R dl(\mathbf{x})\ \widehat{M}_i(\widehat{G}(xB))n_i = -i\frac{\omega V_0^2}{2}\oint_R dl(\mathbf{x})n_r[\widehat{G}(xB)^*\partial_r\widehat{G}(xB) - \partial_r\widehat{G}(xB)^*\widehat{G}(xB)]$$
$$\approx \omega^2 V_0 \oint_R dl(\mathbf{x})\ \widehat{G}(xB)^*\widehat{G}(xB) \tag{14}$$

と書ける．これは式 (5) で $A \to B$ とした場合と一致する．よって，式 (10) を用いて，

$$\oint_R dl\ \widehat{M}_i(\widehat{G}(xB))n_i = i\frac{\omega V_0^2}{2}[\widehat{G}(BB) - \widehat{G}(BB)^*] + \frac{\omega V_0^2}{32}H_l^{(2)}(Bj)H_m^{(1)}(Bj)e^{i(-l+m)\theta_{Bj}}$$
$$\times [i(-1)^m F_{l,-m}^* - i(-1)^l F_{m,-l} + \frac{1}{2}F_{ln}^* F_{mn}]. \tag{15}$$

を得る．第一項は Return グリーン関数の虚数部である．この結果を式 (13) と比較すれば，式 (11) がエネルギー保存のための条件として得られる．これは，光学定理を一般化した式と解釈して良い．特に，円筒型の障害物の場合，これは，よく知られている光学定理と一致する．