

減衰性媒質におけるSPAC法の定式化

中原 恒 (東北大学大学院理学研究科)

Formulation of the SPAC method in dissipative media
Hisashi NAKAHARA (Graduate School of Science, Tohoku Univ.)

1. はじめに

近年, 地震波干渉法に基づき振幅情報を利用して地下の減衰構造を推定できるかどうか大きな問題となっている. Prieto et al. (2009)は, Aki (1957) による非減衰性媒質におけるSPAC法の式を, 物理的直観に基づいて減衰性媒質に拡張した予想式を提案し, それに基づいて南カリフォルニア地域の減衰構造を推定した. しかし, その予想式は理論的には証明されておらず, 適用限界も明らかではない. 本研究では, SPAC法と地震波干渉法との理論的な関係式を利用して, この問題を解決できたので報告する.

2. SPAC法と地震波干渉法との関係

地震波干渉法とSPAC法との間には, 理論的な関係があることが示されている (例えば, Nakahara, 2006 ; Yokoi and Margaryan, 2008) . まず, SPAC法で重要な, 点 \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 における波動場 u の規格化クロススペクトルの定義は

$$C_{1,2}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \frac{\langle u(\mathbf{x}_1, \omega)u(\mathbf{x}_2, \omega)^* \rangle}{\langle |u(\mathbf{x}_1, \omega)|^2 \rangle} = \frac{\langle u(\mathbf{x}_1, \omega)u(\mathbf{x}_2, \omega)^* \rangle}{\langle |u(\mathbf{x}_2, \omega)|^2 \rangle} \quad (1)$$

である. ここで ω は角周波数, $*$ は複素共役, $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表す. また波動場の空間定常性も仮定されている. Sanchez-Sesma and Campillo (2006) 等によると, 地震波干渉法が厳密に成立する場合, クロススペクトルはグリーン関数 G の虚部 $\text{Im}G$ に比例する:

$$\langle u(\mathbf{x}_1, \omega)u(\mathbf{x}_2, \omega)^* \rangle \propto \text{Im}[G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega)]. \quad (2)$$

この表現は非減衰性媒質でも減衰性媒質でも成り立つが, 非減衰性媒質の場合は遠方からの平面波入射あるいは遠方でノイズ源が観測点を取り囲むように分布していることが必要なのに対し, 減衰性媒質の場合はノイズ源が体積的に分布している必要がある (例えば, Snieder, 2007) . この違いはきちんと認識しておく必要がある. いずれにせよ, この表現を用いると, SPAC法と地震波干渉法との間には次のような関係があることが分かる:

$$C_{1,2}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\text{Im}[G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega)]}{\lim_{\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1} \text{Im}[G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \omega)]} = \frac{\text{Im}[G(\mathbf{r}, \omega)]}{\lim_{\mathbf{r} \rightarrow 0} \text{Im}[G(\mathbf{r}, \omega)]}. \quad (3)$$

ただし $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $r = |\mathbf{r}|$ である.

3. 減衰性媒質におけるSPAC法の定式化

減衰性媒質においてSPAC法を定式化するためには, 減衰性媒質における波動方程式のグリーン関数を(3)に代入すればよい. Margerin and Sato (2011)は, 減衰性媒質における地震波干渉法の証明にあたって, 次の波動方程式を用いた:

$$\Delta u(\mathbf{r}, t) - \left(\frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{2\kappa}{V_0} \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \kappa^2 u(\mathbf{r}, t) \right) = 0. \quad (4)$$

この波動方程式の解は, たとえば今村 (1978) の教科書に示されている. 周波数領域では, 非減衰性媒質の解は, 波数の実数部 k_0 に虚数部 κ を付加した複素波数を用いて表現される.

本研究では, 1次元, 2次元, 3次元のすべての場合の定式化を行ったが, ここではPrieto et al. (2009)の予想式との関係を見るために, 2次元の結果のみを示す. この場合, 0次の第1種ハンケル関数 $H_0^{(1)}(x)$ で表わされるグリーン関数を(3)に代入して,

$$C_{1,2}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\text{Im} \left[iH_0^{(1)}((k_0 + i\kappa)r) \right]}{\lim_{r \rightarrow 0} \text{Im} \left[iH_0^{(1)}((k_0 + i\kappa)r) \right]} \quad (5)$$

のような厳密式が導かれる。このままでは解析的に扱い難いため、減衰が小さいという条件で展開すると、

$$C_{1,2}(\mathbf{r}, \omega) \approx J_0(k_0 r) \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\kappa}{k_0} \right) \right] + \left(\frac{\kappa}{k_0} \right) (k_0 r) Y_1(k_0 r) \quad (6)$$

となる。なお、 $J_n(x)$ 、 $Y_n(x)$ はそれぞれ n 次のベッセル関数、ノイマン関数である。減衰が小さいという条件に加えて、観測点間距離に比べて波長が十分短い ($k_0 r \gg 1$) 条件も付加すると、(5)は次のようになる：

$$C_{1,2}(\mathbf{r}, \omega) \approx \exp(-\kappa r) \left[J_0(k_0 r) \left(1 + \frac{2\kappa}{\pi k_0} \right) + \frac{\kappa}{2k_0} Y_0(k_0 r) \right]. \quad (7)$$

この式の[]内で、 $\kappa/k_0 \ll 1$ とすると、次のPrieto et al. (2009)の予想式が導かれる：

$$C_{1,2}(\mathbf{r}, \omega) = J_0(k_0 r) \exp(-\kappa r). \quad (8)$$

以上により、Prieto et al. (2009)の予想式の導出方法が明らかになった。

(5)の厳密解、(7)の近似解、(8)の予想式を、 $\kappa/k_0 = 0.01, 0.1$ の場合に比較した結果を図1に示す。左の $\kappa/k_0 = 0.01$ の場合は、すべてがほぼ一致した。一方右の $\kappa/k_0 = 0.1$ の場合、厳密解と(7)の近似解は $k_0 r = 0$ の周辺を除いてよく合っている。不一致は(7)のノイマン関数によるが、そもそもこの範囲は $k_0 r \gg 1$ という近似の範囲外である。一方、(8)の予測式は $k_0 r$ が小さい場所で厳密解との不一致を見せるが、この式も $k_0 r \gg 1$ の近似の下に導出された式であることを考えると、それ以外の領域でも厳密解との違いが高々5%と小さいのはやや驚きである。以上のように、本研究により、(8)のPrieto et al. (2009)の予測式は、厳密ではないが、減衰が十分小さい場合にはよい近似となっていることが明らかになった。

4. まとめ

本研究では、SPAC法と地震波干渉法との理論的な関係を用いて、減衰性媒質におけるSPAC法の定式化に成功した。その結果、Prieto et al. (2009)による予想式の理論的導出方法を明らかにすることができた。また、この予想式は厳密ではないものの、減衰が小さい場合に成り立つ近似式であることが分かった。

謝辞 本研究は、日本学術振興会の日独共同研究による支援を受けました。

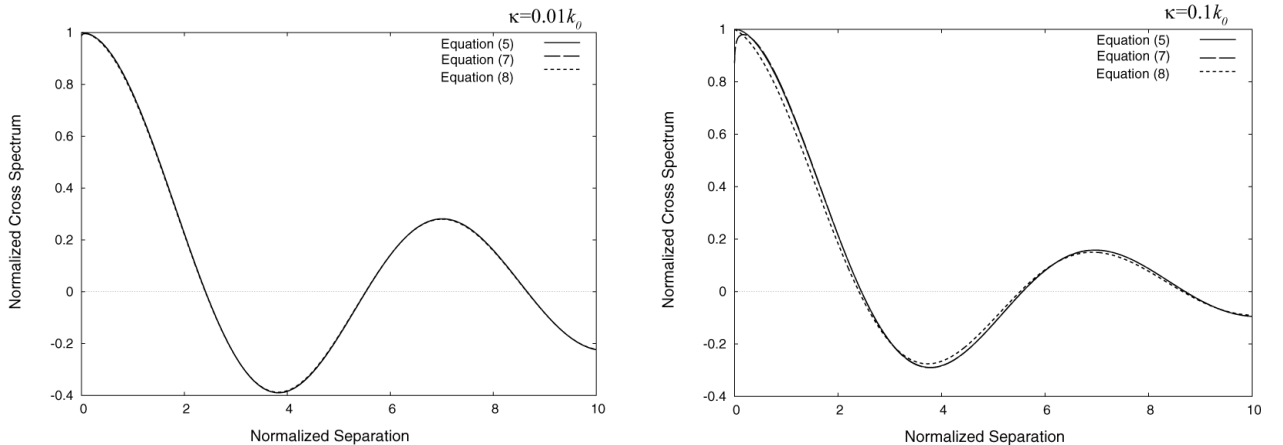


図1 式(5), (7), (8)の比較. 左が $\kappa/k_0 = 0.01$ 、右が $\kappa/k_0 = 0.1$ の場合。