

ノイズ相互相関関数に基づく散乱媒質のグリーン関数の導出：多重散乱の場合

L. Margerin¹, 佐藤春夫²

¹ Observatoire Midi-Pyrénées, C.N.R.S., France, ² 東北大学大学院理学研究科

1 序

雑微動の相互相関関数 (CCF) から媒質のグリーン関数に関する情報が得られるということから、地震学分野においても多くの解析がなされるようになった。初期には主として直達波の伝播速度を求める解析がなされていたが、近年、CCF のコーダ部分も解析の対象となされるようになってきた。この場合、雑微動の CCF と不均質媒質のグリーン関数がどのような関係になっているのかを数理的に明らかにする事が重要である。Sato [2010] は、デルタ関数的な点散乱体が分布する場合、ノイズ源が3次元空間に一樣ランダムに分布している時には一次散乱を含めたグリーン関数が CCF から求める事ができることを示した。

速度 c が一様でない3次元不均質媒質中にノイズ源がランダムに分布する場合、観測点 A と B におけるスカラー波 u の CCF とグリーン関数の関係を考察する (図1参照)。背景の速度が c_0 で小さな減衰が l_a (長さ次元) で与えられる場合、外力 (ノイズ源) f が働く時、波動は

$$-\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} - \frac{1}{c_0 l_a} \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} - \frac{1}{c_0^2} \right) \frac{\partial^2 u(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} + \nabla^2 u = f(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

で記述される。ノイズ源は、その空間分布が一樣ランダムで、時間的にも定常ランダム (自己相関関数 $S_N(\tau)$, パワースペクトル密度 $\hat{S}_N(\omega)$) とする。そのようなノイズ源のアンサンブルを考えれば、ノイズ源の CCF のアンサンブル平均は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle f(\mathbf{x}, t - \tau) f(\mathbf{x}', t) \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') S_N(\tau) \quad (2)$$

と書ける。この場合、2観測点 A と B における CCF のアンサンブル平均は、 $G^+(k_0)$ を $\omega = c_0 k_0$ での遅延

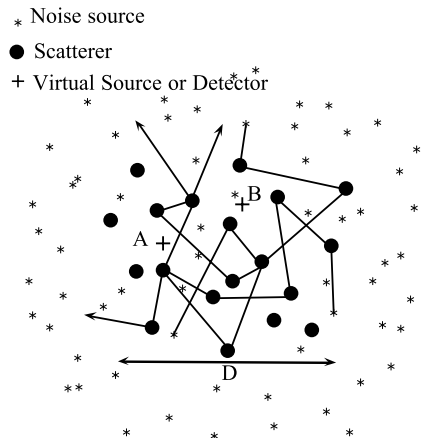


図1 3次元一様媒質中に点散乱体が分布する中で、ランダムに分布するノイズ源から波動が輻射される場合を考える。

グリーン関数とすると,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle u(\mathbf{x}_A, t - \tau) u(\mathbf{x}_B, t) \rangle dt \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \hat{S}_N(\omega) \iiint_{-\infty}^{\infty} G^+(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}, k_0)^* G^+(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}, k_0) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける, ここで,

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} G^+(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}, k_0)^* G^+(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}, k_0) d\mathbf{x} = -\frac{l_a}{k_0} \frac{(G^+(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_A, k_0) - G^+(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, k_0)^*)}{2i} \quad (4)$$

という関係が成り立てば, CCF の時間微分,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle u(\mathbf{x}_A, t - \tau) u(\mathbf{x}_B, t) \rangle dt \\ = \frac{l_a c_0}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[e^{-i\omega\tau} G^+(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_A, \omega/c_0) - e^{-i\omega(-\tau)} G^+(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \omega/c_0) \right] \hat{S}_N(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

はグリーン関数と $\hat{S}_N(\omega)$ との畳み込みで書かれる. 即ち, ノイズ CCF に基づく散乱媒質のグリーン関数の導出において, 式 (4) の成立が鍵となる.

Margerin and Sato [2011] は, この問題を波動の散乱問題として再定式化し, この系の T 行列が光学定理を満たすという条件と式 (4) の成立が等価であることを示した. また, デルタ関数的な散乱点が分布する場合, 摂動展開の高次項についても, この関係を確認めた. 本報告は, この論文の要約である.

2 散乱による定式化

3次元一様均質媒質におけるグリーン関数 G_0^+ は,

$$\left[\nabla_x^2 + \left(k_0 + \frac{i}{2l_a} \right)^2 \right] G_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; k_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6)$$

の解であり,

$$G_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; k_0) = -\frac{e^{(ik_0 - 1/2l_a)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (7)$$

と書ける. 以下では, 時間依存項 $e^{-i\omega t}$ の記載は省略する. ここで2点が一致する場合, 実部 $\text{Re}G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}; k_0)$ は発散するが, 虚部は有限で $\text{Im}G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}; k_0) = -k_0/(4\pi)$ であることに注意する.

波数領域では

$$G_0^+(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; k_0) = g_0^+(\mathbf{k}; k_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{k_0^2 - k'^2 + ik_0/l_a} \quad (8)$$

を満たす. 次に, 速度ゆらぎに起因する摂動項を v とすると, 不均質媒質における波動方程式は,

$$\left[\nabla_x^2 + \left(k_0 + \frac{i}{2l_a} \right)^2 - v(\mathbf{x}; \omega^2) \right] G^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; k_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (9)$$

と書ける. 散乱ポテンシャルを

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \omega^2) = v(\mathbf{x}; \omega^2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\omega^2 \left(\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} - \frac{1}{c_0^2} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (10)$$

と定義すれば、不均質媒質における方程式は、

$$[z - (-\nabla^2 + V(\omega^2))]G = I \quad (11)$$

と書ける。ここで、角周波数 ω に対応して $z = (k_0 + i/2l_a)^2$ とすればよい。グリーン関数 $G^+(z)$ は

$$G^+(z) = G_0^+(z) + G_0^+(z)V(\omega^2)G^+(z) \quad (12)$$

で与えられる。

この系は、次のような散乱行列 T を用いて表す事ができる。

$$G^+(z) = G_0^+(z) + G_0^+(z)T(z)G_0^+(z), \quad (13a)$$

$$T(z) = V(\omega^2) + V(\omega^2)G^+(z)V(\omega^2). \quad (13b)$$

ここで $T^+(k) = T((k + i/2l_a)^2)$ とする。

3 一般化された光学定理

ノイズ源がランダム一様に空間に分布する場合、式 (4) は、波数領域の積分として、

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} G^+(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}; k_0)G^+(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}; k_0)^* d^3k = -\frac{l_a}{k_0} \frac{(G^+(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a; k_0) - G^+(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b; k_0)^*)}{2i} \quad (14)$$

と書かれる。一様な速度構造の中では、

$$g_0^+(\mathbf{k}; k_0)g_0^+(\mathbf{k}; k_0)^* = -\frac{l_a}{k_0} \frac{g_0^+(\mathbf{k}; k_0) - g_0^+(\mathbf{k}; k_0)^*}{2i} \quad (15)$$

が成立する。この関係と、 T 行列に関する相反性を用い、さらに内部減衰が十分小さいとすれば、 $d^2\hat{k}$ を立体角積分として、

$$\frac{T^+(\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b; k_0) - T^+(\mathbf{k}_b, \mathbf{k}_a; k_0)^*}{2i} = -\frac{\pi k_0}{2} \iint_{4\pi} T^+(k_0\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{k}_b; k_0)T^+(k_0\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{k}_a; k_0)^* d^2\hat{k} \quad (16)$$

が導かれる。これは一般化された光学定理と呼ばれる。詳しい証明は Margerin and Sato [2011] を参照されたい。

4 点散乱体

速度不均質構造がデルタ関数で表される点散乱体の分布で与えられる場合を考えよう [Sato, 2010]。 N 個の点散乱体によるポテンシャルは、

$$V(\omega^2) = w \sum_{i=1}^N |\mathbf{x}_i\rangle\langle\mathbf{x}_i| \quad (17)$$

と書くことができる。ここで、 $w = -\alpha k_0^2$ および $\alpha = \nu_0(c_0^2/c_1^2 - 1)$ とし、 c_1 は散乱体内部の速度とする。また、 ν_0 は散乱体の体積に対応する。この時、 T 行列は

$$T^+(k_0) = V(\omega^2) \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} (G_0^+(k_0)V(\omega^2))^i \right) \quad (18)$$

$$= V(\omega^2) (1 + G_0^+(k_0)V(\omega^2) + G_0^+(k_0)^2V(\omega^2)^2 + G_0^+(k_0)^3V(\omega^2)^3 \dots). \quad (19)$$

のように、ボルン近似の高次項を含む無限級数和で表される。

5 一つの散乱体による散乱と光学定理

まず、原点に置かれた一つの点散乱体による散乱を考えよう。平面波素解

$$\langle \mathbf{k}_a | V(\omega^2) | \mathbf{k}_b \rangle = \frac{w}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}_i(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a)} \quad (20)$$

$$\langle \mathbf{k}_a | G_0^+(k_0) V(\omega^2) | \mathbf{k}_b \rangle = \frac{w g_0(\mathbf{k}_a)}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}_i(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a)} \quad (21)$$

を用いて (19) の行列要素を求めると

$$\langle \mathbf{k}_a | T^+(k_0) | \mathbf{k}_b \rangle = \frac{t(\omega)}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}_i(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}_a)} \quad (22)$$

と書けるが、

$$t(\omega) = \frac{w}{1 - \frac{w}{(2\pi)^3} \iint \int_{-\infty}^{+\infty} g_0^+(\mathbf{k}) d^3k} \quad (23)$$

となり、分母に現れる g_0 の積分は発散する。これはリターン・グリーン関数 $G_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)$ に起因する。

この発散を防ぐため、高周波数域を切断する正則化 (regularization) を行う。これは、デルタ関数の散乱体を (小さな) 広がりを持った散乱体へと修正する作業と考えてよい。ある長さ $l_c > 0$ (regularization length) を導入して

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iint \int_{-\infty}^{+\infty} g_0^+(\mathbf{k}) d^3k \approx -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2l_c} - \frac{1}{2l_a} + ik_0 \right). \quad (24)$$

とする。ただし、 $l_a > l_c$ と選ぶ。正則化されたリターン・グリーン関数の実部は有限となり、虚部は正則化以前の G_0 と同じである。これを式 (23) に代入して正則化し、

$$t(\omega) = \frac{-1}{\frac{1}{\alpha k_0^2} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2l_c} - \frac{1}{2l_a} + ik_0 \right)} \quad (25)$$

を得る。

式 (25) から、直接の計算で $(t(\omega) - t(\omega)^*)/(2i) = -k_0/(4\pi)t(\omega)t(\omega)^*$ 、即ち、

$$t(\omega) - t(\omega)^* = 2i \operatorname{Im} G_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}) t(\omega) t(\omega)^* = (G_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - G_0^+(\mathbf{x}, \mathbf{x})^*) t(\omega) t(\omega)^* \quad (26)$$

を示す事ができる。これは一散乱体に関する光学定理であるが、左辺は t の一次、右辺は二次の量であることに注意する。式 (25) を用いれば、 T に関する一般的表現式 (16) が成り立つことを示すことができる。

6 光学定理に基づく多重散乱項の相殺

一つの散乱体の場合、散乱の高次項の処理は T 行列の導入と正則化で解決された。次に、散乱体が多数ある場合の多重散乱の問題を考えよう。グリーン関数の摂動計算には、Frisch [1968] によるダイヤグラム表示が有用である (図2参照)。図中、点線は同一の散乱体をつなぐものであるが、隣接した点をつなぐ事はできない。それは、既にボルン近似の高次和の計算で取り込まれているからである。

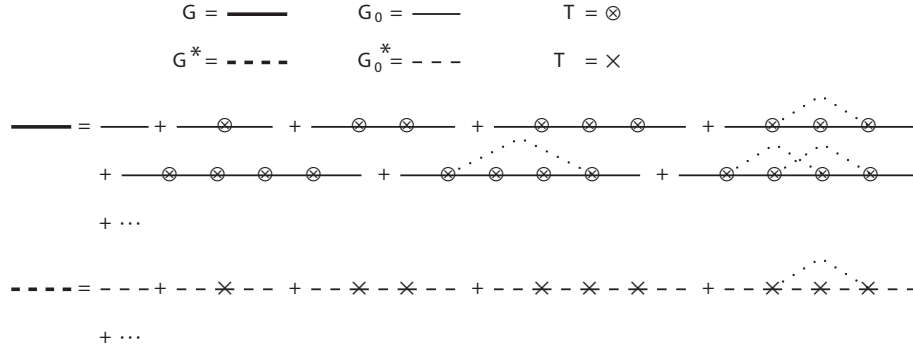


図2 グリーン関数のダイアグラム表示 [Frish, 1968]

G と G^* の積について、ノイズ源分布に関する空間積分 (式 (4) の左辺) を実行する。ここで、 G_0 に関しては式 (4) が成り立つことを再帰的に用いる。図 3 は、 $\int G^+ G^{+*} dx$ の最初の数項をダイアグラム表示したもので、カギ括弧は空間積分を表す。この積分の結果、同一の散乱体が現れる場合 (点線で接続されたもの) には注意を要する。図 3.a の左は展開第一項の $\int G_0^+ G_0^{+*} dx$ 、右辺は G_0^+ に関する式 (4) そのもので $-\frac{l_0}{2ik_0} (G_0^+ - G_0^{+*})$ である。図 3.b の左は $\int G_0^+ G_0^{+*} t^* G_0^{+*} dx$ 、① は t について一次の散乱項 $G_0^+ t^* G_0^{+*}$ である。図 3.c の左は $\int G_0^+ t G_0^{+*} dx$ 、② は一次散乱項 $G_0^+ t G_0^{+*}$ である。図 3.d の左は $\int G_0^+ t G_0^{+*} t^* G_0^{+*} dx$ 、⑤ は 2 次散乱項 $G_0^+ t (G_0^+(0,0) - G_0^{+*}(0,0)) t^* G_0^{+*}$ である。図中では、次数の異なる項が、光学定理 (26), $t^* - t + tt^* (G_0^+(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) - G_0^{+*}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j)^*) = 0$ (図 3.1) を用いて

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{5} &\equiv 0 \\ \textcircled{3} + \textcircled{7} + \textcircled{17} &\equiv 0 \\ \textcircled{4} + \textcircled{6} + \textcircled{12} &\equiv 0 \end{aligned}$$

のように、互いに相殺する。これら互いに相殺できる項を疑似項 (spurious terms) と呼ぶ。さらに高次の項についても、光学定理を用いて逐次的に疑似項を相殺することができて、ダイアグラムには図 2 に示すような G と G^* のみが残る。結果として (4) の右辺と一致する。すなわち、定常ランダムノイズ源が空間に一様ランダムに分布しているとき、点散乱体が分布する不均質媒質 (散乱媒質) におけるグリーン関数をノイズの CCF から導出することができた。より一般的な証明と詳細な説明は、Margerin and Sato [2011] に詳しく述べられている (論文中、式 (65) の光学定理は誤植で、正しくは $t^* - t + tt^* (G_0^+(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) - G_0^{+*}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j)^*) = 0$)。Snieder and Fleury [2010] は、不均質媒質を囲むようなノイズ源分布の場合について光学定理の意義を述べているので、参照されたい。

7 結論

- 光学定理が成り立つことと不均質媒質 (小さな減衰を含む) におけるグリーン関数をノイズの CCF から導出できることは等価である。
- 点散乱体が一様媒質中に分布する場合、一散乱体に関する光学定理を用いれば、摂動展開の高次項に現れる疑似項を相殺することができることをダイアグラム表示を用いて示すことができた。

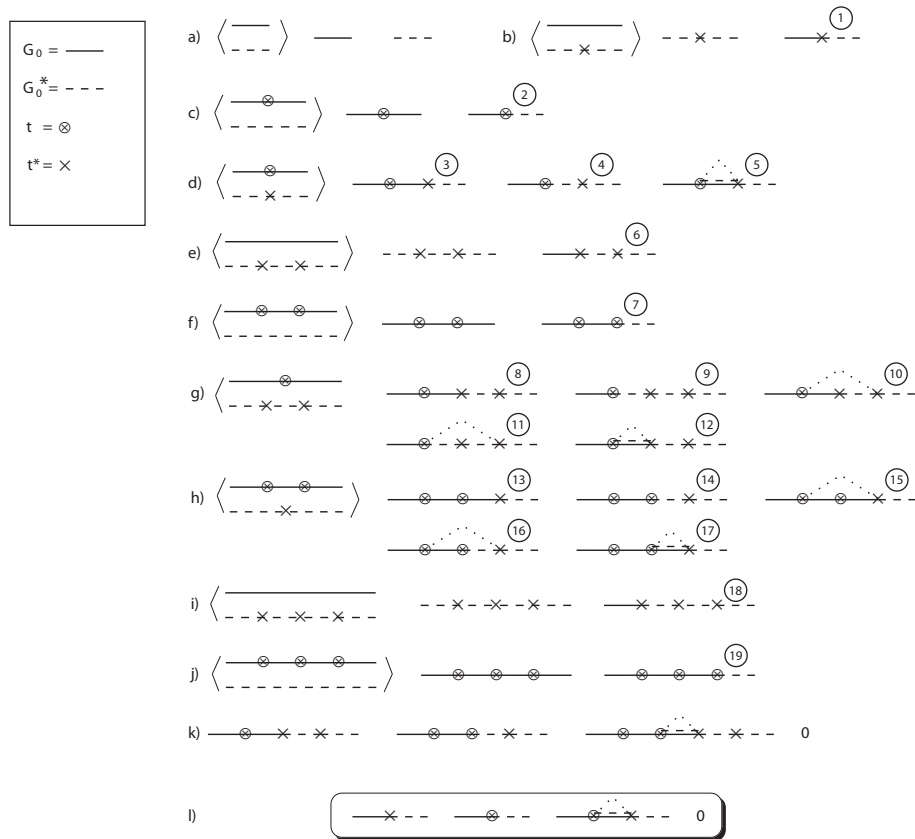


図3 グリーン関数の積の空間積分 $\int G^+ G^{+*} dx$ の最初の数項のダイヤグラム表示. 数字のついたダイヤグラムは, 光学定理の適用によって, 互いに相殺する項を表す.

参考文献

- [1] Frish, V. (1968) Wave propagation in random media, In Probabilistic Methods in Applied Mathematics (ed. Bharucha Reid, A. T.) (Academic Press, New York) pp. 76-198.
- [2] Margerin, L. and H. Sato (2011) Reconstruction of multiply-scattered arrivals from the cross-correlation of waves excited by random noise sources in a heterogeneous dissipative medium, Wave Motion, 48, 146-160.
- [3] Sato, H. (2010) Retrieval of Green's function having coda waves from the cross-correlation function in a scattering medium illuminated by a randomly homogeneous distribution of noise sources on the basis of the first-order Born approximation, Geophys. J. Int. 180, 759-764.
- [4] Snieder, R. and C. Fleury (2010) Cancellation of spurious arrivals in the Green's function retrieval of multiple scattered waves, J. Acous. Soc. Am 128, 1598-1605.