2次元無限等方散乱媒質における弾性波の輻射伝達：
等方震源の場合の半解析的解法

#中原　恒（東北大学）・吉本和生（横浜市大）

Radiative transfer of elastic waves in 2D infinite isotropic scattering media: Semi-analytical approach for an isotropic source

#Hisashi NAKAHARA(Tohoku Univ.) and Kazuo YOSHIMOTO(YCU)

１．はじめに

宇宙光学の分野で開発された輻射伝達理論は，1980年代に地震学に導入されて以降，多重散乱まで含んだ地震波エンベロープを理論的に合成する手法としてよく利用されている（Sato and Fehler, 1998）．近年, P波とS波のエネルギー平衡が, 多重散乱の卓越性を示す証拠として注目されている（Shapiro et al., 2000）. また地震波干渉法の成立条件としても重要視されている（Sanchez-Sesma and Campillo, 2006）. P波，S波のエネルギーの時間変化について考察するためには輻射伝達理論が有効で，3次元無限等方散乱媒質に対してはすでにZeng (1993)やSato(1994)による研究がある．本研究では，2次元無限等方散乱媒質中における等方震源からのP波，S波の輻射伝達の定式化に成功したので報告する．これはSato(1994)の2次元版に相当する．

２．定式化

2次元無限媒質中に等方散乱体が一様ランダムに分布すると仮定する．原点から瞬間的かつ等方的に輻射されるP波，S波のエネルギーをそれぞれW^P, W^Sとする．P波速度，S波速度をそれぞれα_0, β_0，P-P, P-S, S-P, S-S散乱の全散乱係数をそれぞれ $g_0^{PP}, g_0^{PS}, g_0^{SP}, g_0^{SS}$，内部減衰係数はPとSとで同じ$b$ と仮定する．この場合，位置$\mathbf{x}$，時刻 t におけるP波，S波のエネルギー密度（エンベロープ） $E^P(\mathbf{x},t), E^S(\mathbf{x},t)$ は以下のように記述できる：

$$E^P(\mathbf{x},t) = W^P G^P(\mathbf{x},t) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{E^P(\mathbf{x}',t')\alpha_0 g_0^{PP} + E^S(\mathbf{x}',t')\beta_0 g_0^{SP}\right\} G^P(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t')dt'd\mathbf{x}', \quad (1)$$

$$E^S(\mathbf{x},t) = W^S G^S(\mathbf{x},t) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{E^S(\mathbf{x}',t')\beta_0 g_0^{SS} + E^P(\mathbf{x}',t')\alpha_0 g_0^{PS}\right\} G^S(\mathbf{x}-\mathbf{x}',t-t')dt'd\mathbf{x}'. \quad (2)$$

ただし,

$$G^P(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi\alpha_0 r} H(t)\delta\left(t-\frac{r}{\alpha_0}\right) e^{-(\alpha_0 g_0^{PP}+\alpha_0 g_0^{PS}+b)t}, \quad (3)$$

$$G^S(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi\beta_0 r} H(t)\delta\left(t-\frac{r}{\beta_0}\right) e^{-(\beta_0 g_0^{SS}+\beta_0 g_0^{SP}+b)t}. \quad (4)$$

なお$|\mathbf{x}|=r$，$H(t)$ は階段関数である．1次散乱項の解析的導出を可能とするため,

$$\alpha_0 g_0^{PP} + \alpha_0 g_0^{PS} + b = \beta_0 g_0^{SS} + \beta_0 g_0^{SP} + b \equiv \eta \quad (5)$$

と仮定する．

以上の方程式系を，空間についてフーリエ変換，時間についてラプラス変換を行うことで形式的に解くことができる．しかし，数値的安定性のため，本研究では直達項と1次散乱項については楕円座標系を導入す

ることにより解析的な表現を求め，2次以上の多重散乱項についてのみフーリエ・ラプラス変換を利用して数値的に解く.

３．結果

得られる解は次の通りである：

$$
\begin{aligned}
E^P(r,t) &= W^P G^P(r,t) \\
&+ \frac{W^P \alpha_0 g_0^{PP} e^{-\eta t}}{2\pi r\sqrt{(\alpha_0 t/r)^2 - 1}} H(\alpha_0 t/r - 1) + \frac{W^S \beta_0 g_0^{SP} e^{-\eta t}}{\gamma \pi^2 r} M(\alpha_0 t/r) H(\alpha_0 t/r - 1) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk k J_0(kr) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\hat{E}}^{P,M}(k, s=-i\omega)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
E^S(r,t) &= \frac{W^S e^{-\eta t}}{2\pi \beta_0 r} H(t)\delta\left(t - \frac{r}{\beta_0}\right) \\
&+ \frac{W^S \beta_0 g_0^{SS} e^{-\eta t}}{2\pi r\sqrt{\left(\frac{\beta_0 t}{r}\right)^2 - 1}} H\left(\frac{\beta_0 t}{r} - 1\right) + \frac{W^P g_0^{PS} e^{-\eta t}}{\pi^2 r} M\left(\frac{\alpha_0 t}{r}\right) H\left(\frac{\alpha_0 t}{r} - 1\right) \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\, k\, J_0(kr) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\hat{E}}^{S,M}(k, s=-i\omega).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ただし，S-PとP-Sの1次散乱項に現れる関数$M(x)$は以下のように定義される：

$$
\begin{aligned}
M(x) &= \frac{1}{\sqrt{(\alpha_0/\beta_0)^2 - 1}} K\left(\sqrt{\frac{x^2 - 1}{(\alpha_0/\beta_0)^2 - 1}}\right) \quad \text{for} \quad 1 \le x < \alpha_0/\beta_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} K\left(\sqrt{\frac{(\alpha_0/\beta_0)^2 - 1}{x^2 - 1}}\right) \quad \text{for} \quad x \ge \alpha_0/\beta_0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここで　k，ω はそれぞれ波数，角周波数，$K(x)$は第1種完全楕円積分である．また$\hat{\hat{E}}^{P,M}$，$\hat{\hat{E}}^{S,M}$はそれぞれP波，S波の多重散乱項であるが，紙幅の都合上具体的には表記しない．2重積分は，波数について離散化波数積分法（台形公式），角周波数についてFFTを用いて数値的に計算することができる.

４．まとめ

本研究では，2次元無限等方散乱媒質における等方輻射震源に対して，P波，S波のエネルギー伝播を輻射伝達理論に基づき定式化することに成功した．特に，1次の変換散乱項を解析的に導出したこと，2次元における多重変換散乱の数理モデルを構築したことに意義があると考えられる．この定式化は，2次元媒質でのP波，S波のエネルギー平衡（中原・吉本，2007地震学会秋），特に場所ごとのローカルなエネルギー平衡について考察する際に有用である.