

1. 初めに

近地地震の短周期の地震波形は、リソスフェアの不均質構造による散乱の影響を強く受ける。直達波の見かけ継続時間はスケーリング則から予測される震源継続時間よりも長く、P波（S波）の着信前後では Transverse (Longitudinal) 成分が励起される。また、励起されたコーダ波は十分長い時間観測される。不均質が弱い場合には一次散乱モデルが有効と考えられ、これに基づいた種々のエンベロープモデルが提案されてきた。一方、不均質が強い場合には多重散乱の効果が大きくなり、特に火山地帯や月震については拡散方程式が用いられてきた。

散乱媒質におけるエネルギー輸送を取り扱う最も標準的な方法としては輸送方程式が知られているが、本稿では PS 変換を考慮した等方多重散乱モデル（輸送方程式）とそれに基づく拡散近似を紹介する。特に、コーダ干渉法において重要な概念である P 波と S 波のエネルギーの安定配分がどのように達成されるかを調べる。

2. PS 変換を考慮した等方多重散乱モデル

地震波エネルギーの伝播を取り扱うには、P 波と S 波という異なる 2 つの伝播速度 α_0 と β_0 を取り入れる必要がある。3 次元空間に等方散乱体がランダム一様に分布しており、各散乱モードの全散乱係数は $g_0^{PP}, g_0^{PS}, g_0^{SP}, g_0^{SS}$ で与えられるとする。

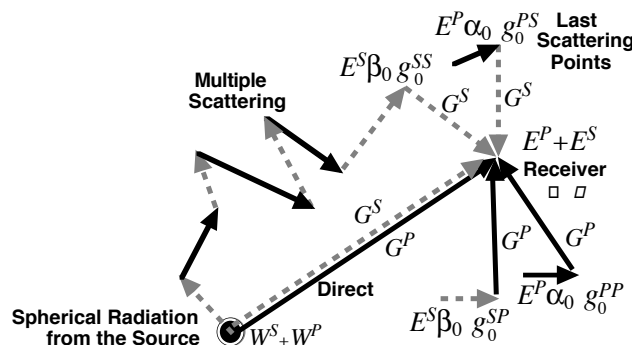


図 1. PS 変換散乱をとりいれた多重散乱モデル

以下では、速度を乗じた $h^{PP} = \alpha_0 g_0^{PP}$, $h^{PS} = \alpha_0 g_0^{PS}$, $h^{SS} = \beta_0 g_0^{SS}$, $h^{SP} = \beta_0 g_0^{SP}$ を用いると、点震源からエネルギー W^P と W^S が球対称に輻射される場合に、エネルギー密度は和 $E(\mathbf{x}, t) = E^P(\mathbf{x}, t) + E^S(\mathbf{x}, t)$ で与えられ、それぞれのエネルギー密度は

$$E^P(\mathbf{x}, t) = W^P G^P(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{E^P(\mathbf{x}', t') h^{PP} + E^S(\mathbf{x}', t') h^{SP}\} G^P(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') dt' d\mathbf{x}' \quad (1)$$

$$E^S(\mathbf{x}, t) = W^S G^S(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{E^S(\mathbf{x}', t') h^{SS} + E^P(\mathbf{x}', t') h^{PS}\} G^S(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') dt' d\mathbf{x}'$$

で記される。直達エネルギー密度の伝播は、内部減衰を考慮して、

$$G^P(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r^2 \alpha_0} H(t) \delta\left(t - \frac{r}{\alpha_0}\right) e^{-(h^{PP} + h^{PS} + b_p)t} \quad (2)$$

$$G^S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r^2 \beta_0} H(t) \delta\left(t - \frac{r}{\beta_0}\right) e^{-(h^{SS} + h^{SP} + b_s)t}$$

で表される。

この連立積分方程式は、フーリエ変換を用いて解析的に解くことが出来る[Sato, 1994]。等方多重散乱モデルは、当初、微小地震の波形エンベロープのモデルとして提案されたが、その際は特異性を持つ一次散乱項の取り扱いに重点が置かれていた (Sato, 1994)。波線経路の模式図を図1に、エンベロープのシミュレーション例を図2に示す。

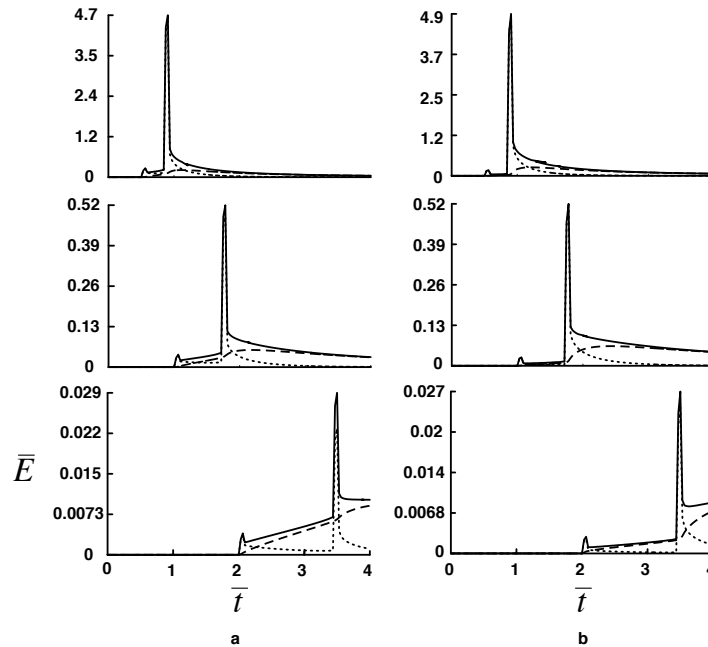


図2. PS 多重散乱モデルによる波形エンベロープ: (a) $\alpha_0 g_0^{PP} = \alpha_0 g_0^{PS} = \beta_0 g_0^{SS} = \beta_0 g_0^{SP} = \eta / 2$; (b) $\alpha_0 g_0^{PP} = 2\eta / 3, \alpha_0 g_0^{PS} = \eta / 3, \beta_0 g_0^{SS} = 9\eta / 10$, and $\beta_0 g_0^{SP} = \eta / 10$. [Sato, 1994].

この等方多重散乱モデルはP波モードとS波モードとの間で変換が繰り返されることを表しているが、時間が十分に経過したときに、P波とS波のエネルギーの安定配分が達成されることを示唆する。 $N = b_p - b_s + h^{PS} - h^{SP}$, $M = \sqrt{N^2 + 4h^{PS}h^{SP}}$ とすると、十分時間が経過した時のエネルギー比は

$$r_{S/P} \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx E^S(\mathbf{x}, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx E^P(\mathbf{x}, t)} = \frac{(M+N)W^S + 2h^{PS}W^P}{(M-N)W^P + 2h^{SP}W^S} \quad (3)$$

に漸近する。内部減衰がPとS波で同じ ($b_p = b_s = b$) ならば、 $M = h^{PS} + h^{SP}$ となり、上記の比は $r_{S/P} = \frac{h^{PS}}{h^{SP}} = \frac{\alpha_0 g^{PS}}{\beta_0 g^{SP}}$ となる。P波とS波の速度比を $\gamma_0 = \alpha_0/\beta_0$ とすると、ボルン近似

から導かれる変換散乱係数の相互関係 $\frac{g_0^{PS}}{g_0^{SP}} = 2\gamma_0^2$ を用いれば $r_{S/P} = 2\gamma_0^3$ が得られる。この

値は、S波の偏極の自由度2を考慮した値であり、各モードへの等分配から予測される比でもある。ポアソン弾性媒質 ($\gamma_0 = \sqrt{3}$) では、この比は10.34である。但し、これは空間積分したエネルギーの比であって、すべての震源距離において局所的にエネルギー密度の安定配分が成立することを示しているわけではない。エネルギー密度の比は、シミュレーションによって個々に確かめる必要がある。

3. 輸送方程式の拡散近似

多重散乱が卓越してくると、拡散近似が有効となる。以下では、輸送方程式の微分形式から出発して、拡散近似を導出する。 $\alpha_0 f_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{q})$ と $\beta_0 f_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{q})$ を Specific intensity とすると、この立体角積分 $E_p(\mathbf{x}, t) = \oint f_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) d\Omega_{\mathbf{q}}$ と $E_s(\mathbf{x}, t) = \oint f_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) d\Omega_{\mathbf{q}}$ はエネルギー密度を表す。ここで $d\Omega_{\mathbf{q}}$ は方位 \mathbf{q} の立体角微分要素である。P波とS波のエネルギー W^P と W^S が原点から球対称 (時間的にはデルタ関数的) に輻射されるとする。輸送方程式は、微分形式で、

$$\begin{aligned} \partial_t f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) + \alpha_0 \mathbf{q} \cdot \nabla f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) &= -(g_0^{PP} \alpha_0 + g_0^{PS} \alpha_0) f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) - b^P f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) \\ &+ \frac{\alpha_0}{4\pi} \oint g_0^{PP}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}') d\Omega_{\mathbf{q}'} + \frac{\beta_0}{4\pi} \oint g_0^{SP}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}') d\Omega_{\mathbf{q}'} + \frac{W^P}{4\pi} \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \\ \partial_t f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) + \beta_0 \mathbf{q} \cdot \nabla f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) &= -(g_0^{SS} \beta_0 + g_0^{SP} \beta_0) f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) - b^S f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) \\ &+ \frac{\beta_0}{4\pi} \oint g_0^{SS}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}') d\Omega_{\mathbf{q}'} + \frac{\alpha_0}{4\pi} \oint g_0^{PS}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}') d\Omega_{\mathbf{q}'} + \frac{W^S}{4\pi} \delta(\mathbf{x}) \delta(t). \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。十分時間が経過すると、 f^P と f^S は空間的に滑らかで角度依存性も小さくなるので、

$$4\pi f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) \approx E^P(\mathbf{x}, t) + \frac{3}{\alpha_0} \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{x}, t) \quad \text{and} \quad 4\pi f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}) \approx E^S(\mathbf{x}, t) + \frac{3}{\beta_0} \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}^S(\mathbf{x}, t)$$

と近似できる。ここで、エネルギー流速密度は

$$\mathbf{J}^P(\mathbf{x}, t) = \alpha_0 \oint d\Omega_{\mathbf{q}} \mathbf{q}' f^P(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}') \quad \text{and} \quad \mathbf{J}^S(\mathbf{x}, t) = \beta_0 \oint d\Omega_{\mathbf{q}} \mathbf{q}' f^S(\mathbf{x}, t; \mathbf{q}')$$

で与えられる。これらを輸送方程式(4)に代入し、時間変化も小さいと仮定して、震源の周りで角度平均をとると、次の微分方程式

$$\begin{aligned} \partial_t E^P - D_P \Delta E^P + g_0^{PS} \alpha_0 E^P + b^P E^P - g_0^{SP} \beta_0 E^S &= W^P \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \\ \partial_t E^S - D_S \Delta E^S + g_0^{SP} \beta_0 E^S + b^S E^S - g_0^{PS} \alpha_0 E^P &= W^S \delta(\mathbf{x}) \delta(t). \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。これは連立拡散方程式であって、P波とS波の拡散係数は

$$D_P = \frac{1}{3} \frac{\alpha_0}{(g_0^{PP} + g_0^{PS})} \quad \text{and} \quad D_S = \frac{1}{3} \frac{\beta_0}{(g_0^{SS} + g_0^{SP})}. \quad (6)$$

と与えられる。

P波とS波の内部減衰が等しい場合 ($b_P = b_S = b$)、十分時間が経過した時に震源近傍でP波とS波のエネルギー密度の配分比が安定となるならば、全エネルギー密度の発展は次の様な拡散方程式で記述できる。

$$\partial_t E - D^* \Delta E + bE = W \delta(\mathbf{x}) \delta(t) \quad (7)$$

ここで、全エネルギー密度の拡散係数は

$$D^* = \frac{D_P \frac{1}{r_{S/P}} + D_S}{1 + \frac{1}{r_{S/P}}} = \frac{1}{3(1 + 2\gamma_0^3)} \left\{ \frac{\alpha_0}{(g_0^{PP} + g_0^{PS})} + \frac{2\gamma_0^3 \beta_0}{(g_0^{SS} + g_0^{SP})} \right\} \quad (8)$$

であり、特にS波の拡散係数に強く支配される。このとき、エネルギー密度比は $r_{S/P} = E^S / E^P = 2\gamma_0^3$ となる。

より一般的な非等方多重散乱の場合でも、輸送散乱係数を導入することで、同様な拡散近似を行うことが可能であり、これに基づいてP波とS波のエネルギーの安定配分が議論されてきた [Papanicolaou et al. 1996; Tumer, 1998; Margerin, et al., 2001]. しかし、十分時間が経過した後でも拡散近似解と輸送方程式の解は震源近傍での差が大きいため、局所的なエネルギー密度比の安定配分の達成についての検討は不十分であった。

4. 等方多重散乱モデルに基づくエネルギー安定配分の達成過程

以下、山本による浅間火山の爆破地震のシミュレーションのパラメータ値に基づき、輸

送方程式 (等方散乱モデル) によって局所的なエネルギー密度比の安定配分の達成を調べることにする。背景速度は $\alpha_0 = 2.7 \text{ km/s}$, $\beta_0 = 1.56 \text{ km/s}$, ($\alpha_0 / \beta_0 = 1.73$) とし, それぞれの散乱係数を $g_0^{PP} = 0.26 \text{ km}^{-1}$, $g_0^{PS} = 0.63 \text{ km}^{-1}$, $g_0^{SP} = 0.11 \text{ km}^{-1}$, $g_0^{SS} = 0.79 \text{ km}^{-1}$ ($g_0^{PS} = 2\gamma_0^2 g_0^{SP}$) とすると, 拡散係数は $D^P = 1.0 \text{ km}^2/\text{s}$, $D^S = 0.58 \text{ km}^2/\text{s}$ となる。内部減衰はゼロとする。S 波の平均自由時間は 0.71 s であり, エネルギーの安定分配を与える時間定数は, $\alpha_0 g^{PS} + \beta_0 g^{SP}$ の逆数から, 0.53 s となる。図 3 に, S 波震源の場合のエネルギー密度の空間分布 (太線は等方多重散乱モデル, 細線は拡散方程式解) 及び P 波と S 波エネルギー密度比 (青線は等方多重散乱モデル, 灰色線は拡散方程式解) の空間分布の時間変化を示す。橙色線は等分配則からの予測配分比 10.34 である。経過時間の増加と共に, 徐々に S 波から P 波へエネルギーが移っていく様子がわかる。しかし, S 波の平均自由時間程度の時間が経過すると, エネルギー密度の配分比は比較的一様となる。しかし, 理論配分比の達成には S 波の平均自由時間の 10 倍以上の時間がかかることがわかる。

図 4 は, 人工地震に相当する P 波震源の場合を示したものである。この場合, 震源近くでは, P 波から S 波への変換が急速に起こり, 1.6 s 程度の時間が経つと S 波のエネルギー密度の配分比は理論予測よりも一旦大きくなる。その後時間が経過すると, S から P への変換によって理論予測値へ漸近することがわかる。

それぞれの図で, 拡散方程式解と等方多重散乱モデルでは十分時間が経過してもエネルギー密度の大きさの違いが目立つことがわかる。

5. まとめ

S 波と P 波のエネルギー密度の安定配分の確立の過程を, 等方多重散乱モデルに基づいて詳細に検討した。S 波と P 波のエネルギー (空間積分量) の安定配分は, かなり早い経過時間で成立することが予測されるが, 局所的な S 波と P 波のエネルギー密度の安定配分の成立に要する時間は, S 波震源と P 波震源では異なり, その達成過程に大きな違いがある。シミュレーション例によれば, S 波震源の場合, 時間経過と共に比較的単純に理論比へ漸近する。P 波震源の場合には, 一旦 S 波エネルギー密度が理論比よりも大きくなり, その後, 理論比の値へ落ち着くことが示された。いずれの場合も, 理論配分比の達成には S 波の平均自由時間の 10 倍以上の時間がかかっている。

今後, エネルギー流速密度の等方性の達成についても, 詳しく調べていくことが重要であろう。

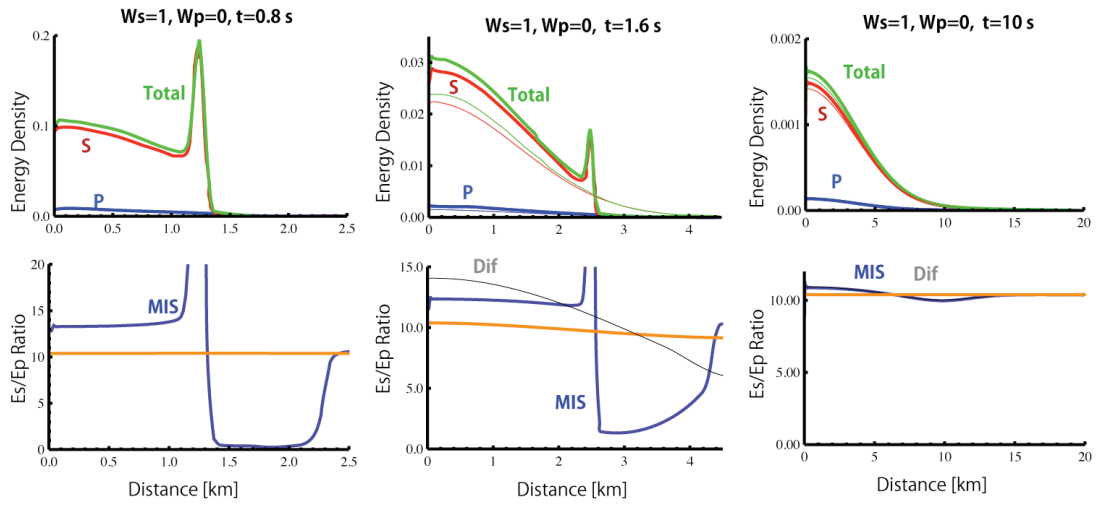


図3. エネルギー密度及びエネルギー密度比の空間分布の時間変化 (S波震源の場合).

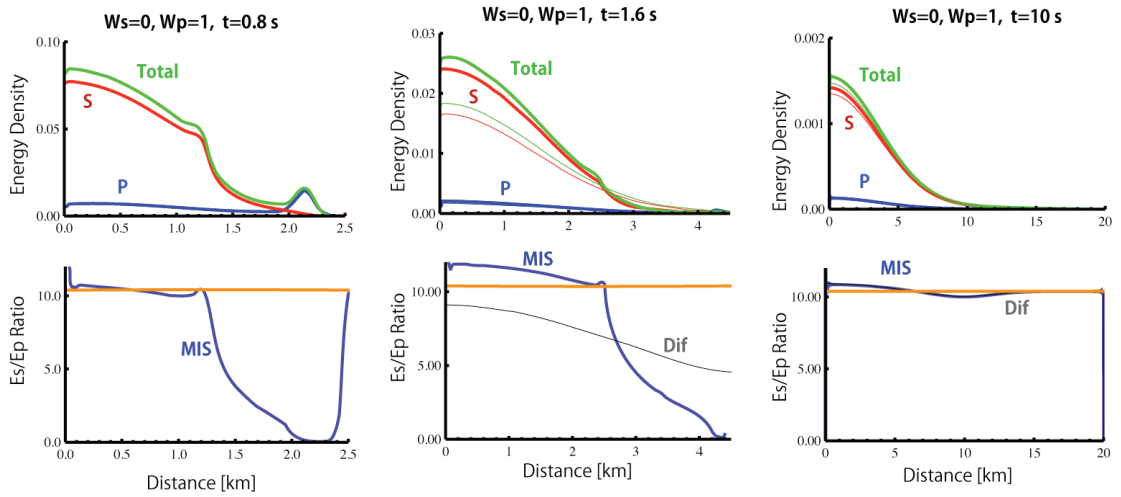


図4. エネルギー密度及びエネルギー密度比の空間分布の時間変化 (P波震源の場合).