

介在物分布による SH 波の散乱減衰と分散

河原 純 (茨城大・理)・蓬田 清 (北大・理)

Attenuation and Dispersion of SH Waves due to Scattering by Inclusions

Jun Kawahara (Ibaraki Univ.), Kiyoshi Yomogida (Hokkaido Univ.)

はじめに

我々は以前、ランダムに分布する離散的散乱体による弾性波の散乱減衰とそれに伴う分散を、理論と数値実験の両面から検討した[1,2]。そして散乱体の分布密度が比較的低い場合には、数値実験で得られた散乱減衰と分散が、Foldy の近似に基づく予測と高度に一致することを示した。その際に扱った離散的散乱体は、具体的には丸い空隙 (cavity) や亀裂 (crack) などであったが、特に中空な空隙はリソスフェアの不均質のモデルとしては単純過ぎると思われる。そこで今回は空隙に代えて、より現実的な不均質モデルとして介在物 (inclusion) について同様な検討を行う。具体的には、2次元の円形介在物のランダム分布による SH 波の散乱を数値的にシミュレートし、その結果から減衰と分散を測定し、既存の理論と比較する。

数値実験

以下に数値実験の概略を述べる。まず、半径 a の N 個の 2次元円形介在物を無限均質弾性媒質 (S 波速度 c_0 , 密度 ρ_0) 中の矩形領域 (横 $L \times$ 縦 W) にランダムに (しかし重ならないように) 分布させた不均質構造モデルを考える。個々の介在物の速度と密度はそれぞれ、

$$c_1 = c_0(1 + \xi), \quad \rho_1 = \rho_0(1 + \nu\xi) \quad (1)$$

で与えられるものとする。以下、Sato & Fehler に倣って $\nu = 0.8$ を仮定する[3]。介在物分布全体の速度と密度の与え方については、以下の 3つのケースを想定する。

- ・ケース 1: 全ての介在物の速度と密度が同一で、共に周囲の媒質より低い ($\xi < 0$)。
- ・ケース 2: 全ての介在物の速度と密度が同一で、共に周囲の媒質より高い ($\xi > 0$)。
- ・ケース 3: 無作為抽出された半数の介在物がケース 1、残りがケース 2 に相当する。

次に、領域下端から平面 SH リッカー波 (卓越周波数 f_0) を入射させ、上端に多数配置された観測点において波動場を合成する。波形合成には、空隙による SH 波散乱を高精度にシミュレートできる Benites *et al.* の境界積分法を、介在物の場合に拡張したものをを用いる[4,5]。なお計算の都合上、測線直下の幅 a の帯状領域から空隙を排除したので、介在物の実質的な分布数密度は $n = N/L(W - a)$ 、体積含有率は $C = \pi na^2$ である。上記のようなシミュレーションを、介在物の個数を変えずに分布パターンのみを変化させて M 回繰り返す。そして、得られた合成波形群に関して観測点間で平均し、その結果をさらに異なる分布パターン間 (分布のアンサンブル) で平均することにより、合成波形の平均 (以下、観測平均波) を求める。ただし領域の左右端からのエネルギー流出の効果を除くため、平均操作の際に、測線の両端から一定距離内の観測点の波形は捨て、中央部の波形のみを用いる。十分に多くの波形の平均を取ることで、インコヒーレントな波群は効果的に除去されると期待される。最後に、観測平均波と、介在物が存在しない場合の入射波のスペクトル比から減衰 Q^{-1} と位相速度 c を算出し、入射波が十分なパワーを持つ帯域 $f_0/2 < f < 2f_0$ (f は周波数) における値を最終結果として採用する。以上の操作を初期波形の卓越周波数 f_0 を変えて繰り返し、 Q^{-1} と c の周波数依存性を求める。

理論

離散的散乱体による多重散乱問題を取り扱う上で、散乱体の分布が十分に疎であれば、Foldy 近似の適用が可能である[6]。このとき、平均波の減衰と分散は $O(n^2)$ の微量を無視する近似下で以下のように求められる。

$$Q^{-1}(k) = n\sqrt{\frac{8\pi}{k^3}} \operatorname{Im} \frac{f(0)}{\sqrt{i}}, \quad \frac{c(k)}{c_0} = 1 - n\sqrt{\frac{2\pi}{k^3}} \operatorname{Re} \frac{f(0)}{\sqrt{i}} \quad (2)$$

ここで $f(\theta)$ は、単一の散乱体に単位振幅の平面単色波が角度 0 で入射したときの散乱角 θ 方向の散乱振幅であり、周波数 f あるいは波数 $k = 2\pi f/c_0$ の関数である。また Im , Re はそれぞれ虚部と実部を表す。2次元円形介在物によるSH波の散乱振幅の解析的表現は、Pao & Mowによって無限級数和の形で与えられている[7]。式(2)とPao & Mowの表現式から得られる減衰と分散を、以下ではFoldy近似理論(FAT)解と呼び、数値実験の結果と比較する。ところで、前方散乱振幅 $f(0)$ の虚部と散乱断面積 σ の間には以下のような関係(光学定理)が成り立つことが知られている[6]。

$$\sigma = \oint |f(\theta)|^2 d\theta = \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \operatorname{Im} \frac{f(0)}{\sqrt{i}} \quad (3)$$

従って減衰のFAT解は

$$Q^{-1} = n\sigma/k \quad (4)$$

の形で表すこともできる。

空隙や亀裂による散乱に関してFATが有効であることは冒頭でも述べた通りである。しかしながら、介在物が周囲の媒質よりも高速度の場合に、因果律の数学的表現であるクラマース・クローニッヒ(以下、K-K)の関係をFAT解が満たさないことが、Beltzer & Braunerによって指摘されている[8]。事実、K-K関係を満たす波動は、

$$c(0) < c(\infty) \quad (5)$$

を満たすことが示されるが、FAT解は一般に $c(\infty) = c_0$ であり、かつ $c(0) - c_0$ は後で見るように ξ と同符号なので、 $\xi > 0$ の場合には式(5)を満たさない。Beltzer & Braunerはこの問題の解決策として、エネルギー論的意義の明確な式(4)を常に正しいと見なし、K-K関係を通じて位相速度を求めることを提案し、これをCausal Approach(以下、CA)と称した。そこで今回は、位相速度に関するCA解も併せて求め、数値実験の結果と比較する(当然ながら減衰に関してFATとCAは等価である)。K-K関係の数学的表現にはいくつかあるが、ここでは以下のFang & Müllerの関係式を用いる[9]。

$$\frac{c(f)}{c(\infty)} = 1 - \frac{1}{2} \mathcal{H} Q^{-1}(f) \quad (6)$$

ここで \mathcal{H} はヒルベルト変換を表す。ただし上式だけでは $c(f)$ の絶対値は定まらないので、Beltzer & Braunerに倣って、Christensenの式[10]

$$c(0) = \sqrt{\frac{\mu_E}{\rho_E}}, \quad \frac{\mu_E}{\mu_0} = \frac{\mu_1(1+C) + \mu_0(1-C)}{\mu_1(1-C) + \mu_0(1+C)}, \quad (7)$$

$$\rho_E = \rho_1 C + \rho_0(1-C), \quad \mu_0 = \rho_0 c_0^2, \quad \mu_1 = \rho_1 c_1^2$$

を用いて $c(0)$ を推定することにより、 $c(f)$ を決定する。後で見るように、式(7)による $c(0)$ はFAT解の低波数極限とよく一致する。

結果

前述の3つのケースのそれぞれについておこなった数値実験の結果を以下に示す。まずケース1の結果を図1に示す。ここでモデルパラメータは以下の通りである：介在物数 $N = 24$ 、分布領域のサイズ $L \times W = 60d \times 11d$ ($d = 2a$ は介在物の直径)、速度コントラスト

ト $\xi = -0.25$ (低速度・低密度介在物)、介在物の体積含有率 $C \approx 3\%$ 、分布パターン数 $M = 8$ 。なお観測平均波の導出には、分布領域上端中央の長さ $24d$ の区間の観測点の波形を用いた。図の実験値 (太い破線) は、卓越周波数 $f_0 = 0.15, 0.3, 0.6, 1.2$ ($\times c_0/a$) の入射波に対して得られた結果をオーバーラップさせて描いている。このケースでは空隙や亀裂の場合と同様[1,2]、位相速度の FAT 解は式(5)を満たしており、予想通り CA 解との等価性が確認された。減衰・分散のいずれについても、FAT/CA 解と実験値の間には若干の系統的なずれが認められるものの、概ね調和的と言える。

次に、ケース 1 において他の条件を変えずに速度コントラストのみを $\xi = 0.5$ (高速度・高密度介在物) に変更したものをケース 2 として、数値実験をおこなった。その結果を図 2 に示す。減衰に関してはケース 1 と同様の結果が得られた。位相速度に関しては、このケースでは FAT と CA とで異なる予測値を与える。意外にも、実験値は FAT 解と調和的であり、CA 解とは大きく食い違った。

最後にケース 3 として、ケース 1, 2 と同じサイズの領域に $N = 32$ の介在物を分布させ、その半数を $\xi = 0.2$ 、残りを $\xi = -0.2$ とした場合を扱った (ただし $M = 5$)。このときの介在物の体積含有率は $C \approx 4\%$ である。ちなみに介在物の分布領域全体を速度ゆらぎ場と見なしたときの標準偏差は $\varepsilon = \sqrt{C}\xi \approx 4\%$ であり、リソスフェアの典型的な不均質強度に相当する[3]。この場合の結果を図 3 に示す。ここでも減衰に関して実験値と FAT/CA 解は概ねよく一致する。一方、分散に関しては、ケース 2 ほど明瞭でないものの、CA 解より FAT 解の方が実験値と調和的に見える。

まとめ

今回の数値実験では、予想に反して「介在物分布による散乱減衰と分散は、介在物の速度コントラストの符号に関わらず、FAT によってよく説明される。」という結果が得られた。このことは見かけ上、「高速度介在物が存在する場合、平均波が K-K 関係を満たさないこともあり得る」という不合理な結論を示唆する。しかしながら、実際の観測平均波の初動波形を見る限り、いかなるケースでも、因果律を明らかに破るような挙動は認められない。この矛盾の解決は今後の課題である。

今回のシミュレーションで用いた介在物分布のパターン数 (分布のアンサンブルのサイズ) M は必ずしも十分大きいと言えない。今後、より多くの分布パターンについてシミュレーションを繰り返すことで、減衰と分散の推定精度を向上させる予定である。

参考文献

- [1] 河原・大野・蓬田 (2003), 東京大学地震研究所特定共同研究(B)「短波長不均質構造と高周波地震波の輻射特性」研究会プログラム,
<http://www.eic.eri.u-tokyo.ac.jp/viewdoc/scat2003/scat2003.pdf>.
- [2] Suzuki, Kawahara, Okamoto, & Miyashita (2006), *Earth, Planets Space*, **58**, 555-567.
- [3] Sato & Fehler (1998), AIP Press/Springer Verlag, New York.
- [4] Benites, Aki, & Yomogida (1992), *Pure Appl. Geophys.*, **138**, 353-390.
- [5] 蓬田 (2001), 地震 **2**, **54**, 77-90.
- [6] 河原 (2001), 地震 **2**, **54**, 91-108.
- [7] Pao & Mow (1973), Crane Russak, New York.
- [8] Beltzer & Brauner (1986), *Mech. Mater.*, **5**, 161-170.
- [9] Fang & Müller (1996), *Pure Appl. Geophys.*, **148**, 269-285.
- [10] Christensen (1979), Wiley, New York.

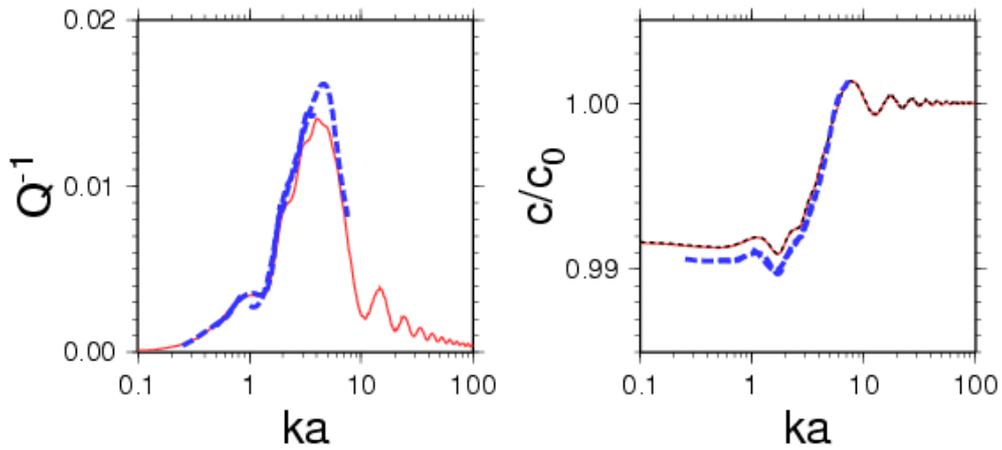


図 1. ケース 1 ($\xi = -0.25$, $C \approx 3\%$) における散乱減衰 (左) と分散 (右)。
赤実線 : FAT 解、青破線 : 実験値、右図の黒点線 : CA 解。

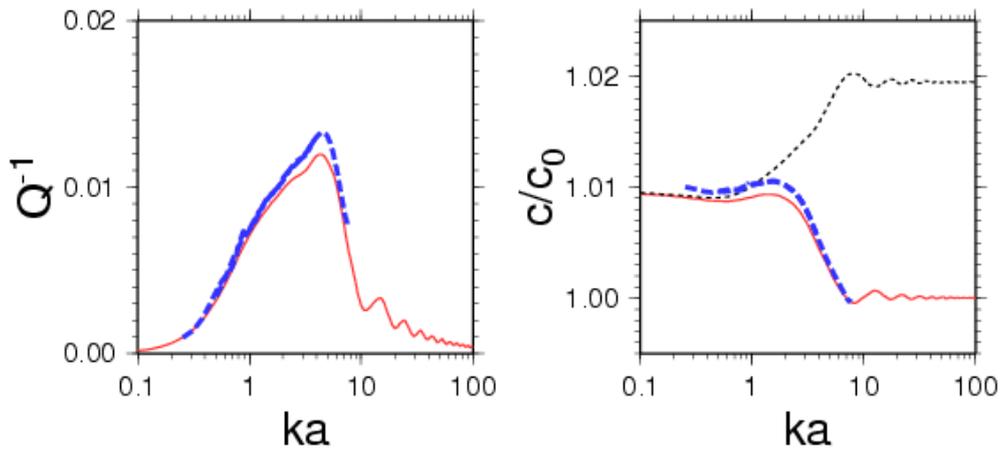


図 2. ケース 2 ($\xi = 0.5$, $C \approx 3\%$) における散乱減衰 (左) と分散 (右)。
各線の意味は図 1 と同様。

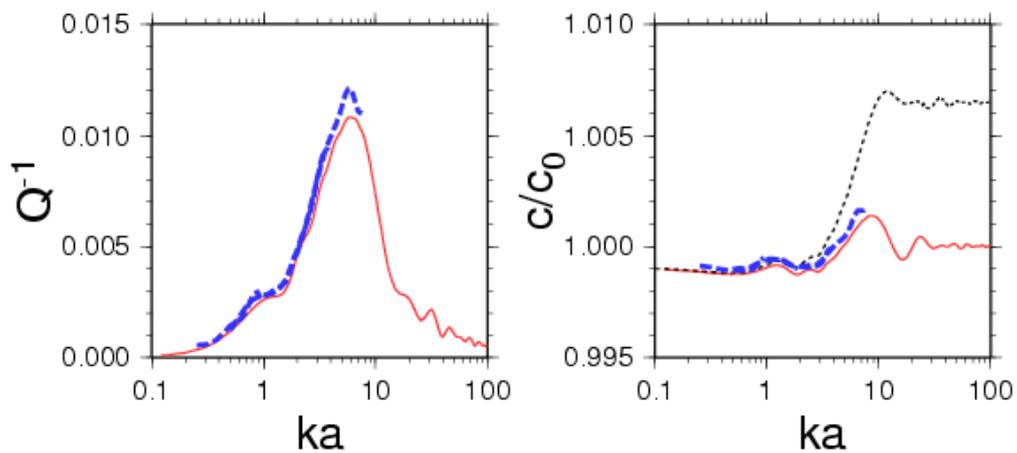


図 2. ケース 3 ($\xi = \pm 0.2$, $C \approx 4\%$) における散乱減衰 (左) と分散 (右)。
各線の意味は図 1 と同様。