

ランダム媒質の自由表面における ベクトル波エンベロープの統計数理的導出（マルコフ近似）

江本賢太郎，佐藤春夫，西村太志
（東北大学大学院理学研究科）

はじめに

地球内部を伝播する短周期（ $> 1\text{Hz}$ ）の地震波は，速度構造の短波長不均質ゆらぎの影響を受ける．たとえば，震源ではパルス的である P 波であっても，不均質媒質を伝播するにつれ，地震波エンベロープの幅が広がったり，トランスバース成分に振幅が励起されたりする．短周期の地震波を扱う際には決定論的手法を用いることは難しいが，ランダムな速度ゆらぎを統計的に扱うことにより，理論的に考察可能である．この統計的手法の一つにマルコフ近似理論がある．この理論は後方散乱を無視した理論であるため，コーダ波部分のエンベロープの再現には向かないが，初動着信からピーク付近までのエンベロープを精度良く理論的に導出することが可能である．しかし，これまでの理論には自由表面の効果が取り入れられていなかった．観測はほとんどの場合，地表で行われるため，より高精度で不均質構造の推定をするためには自由表面の影響を評価する必要がある．たとえば，Kubanza *et al.* (2007) では，遠地 P 波のデータを用いて，トランスバース成分に励起されるエネルギーの割合を Sato (2006) による無限媒質中のエンベロープの理論解と比較することにより，リソスフェアの不均質構造を推定している．地表で P 波トランスバース成分がどのような増幅を受けるのかは自明ではないので，評価しておく必要がある．

角度スペクトル

マルコフ近似理論では，トランスバース面内において二周波数相互相関関数 ${}_0\Gamma_2$ を定義し，この ${}_0\Gamma_2$ を角周波数に関してフーリエ変換することにより，二乗平均エンベロープが求まる．本研究では，このフーリエ変換を行う前に， ${}_0\Gamma_2$ を波数領域にフーリエ変換する．これにより角度スペクトル $\widetilde{{}_0\Gamma_2}$ が求まる．この角度スペクトルを角周波数に関してフーリエ変換することにより，角度スペクトルの時間変化 $\widehat{\widetilde{{}_0\Gamma_2}}^A$ が得られる．これにより，ある場所，ある時刻での波線の向きの分布が得られる．図 1. は初動着信からの角度スペクトルの時間変化を示している．初動着信直後は進行方向にピークを持つ分布をしているが，次第に分布の幅が広がり，ピークがずれていく様子がわかる．横軸である $k_{\perp}/k_c$ は鉛直座標からの角度を θ とすると， $\sin \theta$ に対応している．つまり， $k_{\perp}/k_c = 0.5$ が，30 度の角度を持った波を表している．つまり角度スペクトルは，初めの内は小さい角度の散乱波が卓越しているが，時間がたつにつれて広角の散乱波が卓越してくることを示している．

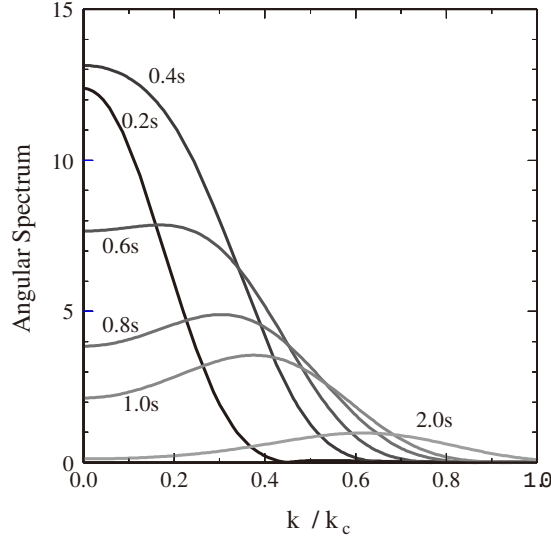


図 1. 角度スペクトルの時間変化． $Z = 100$ km. $V_P = 6$ km/s, $a = 5$ km and $\varepsilon = 0.05$.

自由表面でのエンベロープ

角度スペクトルを用いると無限媒質中の x 成分 ($\hat{I}_{x0}^P$) と z 成分 ($\hat{I}_{z0}^P$) は, それぞれ次のように書ける．

$$\hat{I}_{x0}^P(z, t, \omega_c) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_{\perp} \leq k_c} d\mathbf{k}_{\perp} \frac{k_x^2}{k_c^2} \hat{I}_0^A(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega_c, t) \quad (1)$$

$$\hat{I}_{z0}^P(z, t, \omega_c) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_{\perp} \leq k_c} d\mathbf{k}_{\perp} \left(1 - \frac{k_{\perp}^2}{k_c^2}\right) \hat{I}_0^A(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega_c, t) \quad (2)$$

ここで, 幾何学的には球座標を用いると $k_x^2/k_c^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi$, $(1 - k_{\perp}^2/k_c^2) = \cos^2 \theta$ に対応しており, 無限媒質中のエンベロープは, 単に角度スペクトルをそれぞれの成分へ射影することにより得られる．本研究では, ランダム媒質の等方性を仮定しているため, $\hat{I}_{x0}^P = \hat{I}_{y0}^P$ である．

一方, 自由表面でのエンベロープは, $\hat{I}_0^A$ をある時刻における自由表面での入射角分布だと解釈し, 先ほどの射影項に変わり, 入射角に応じた地表での増幅係数をかけることにより得られる．つまり, 自由表面でのエンベロープの水平成分 $\hat{I}_{x0}^{PF}$ と鉛直成分 $\hat{I}_{z0}^{PF}$ は次のように表される．

$$\hat{I}_{x0}^{PF}(z, t, \omega_c) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_{\perp} \leq k_c} d\mathbf{k}_{\perp} |u_r|^2 \frac{k_x^2}{k_{\perp}^2} \hat{I}_0^A(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega_c, t) \quad (3)$$

$$\hat{I}_{z0}^{PF}(z, t, \omega_c) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_{\perp} \leq k_c} d\mathbf{k}_{\perp} |u_v|^2 \hat{I}_0^A(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega_c, t) \quad (4)$$

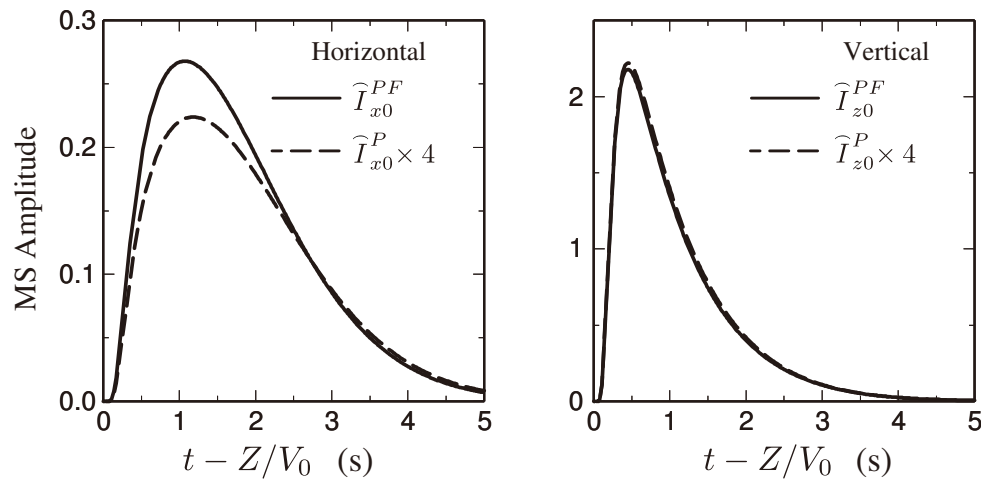


図 2. 自由表面上と無限媒質中でのベクトル波エンベロープの比較．比較のため無限媒質中のエンベロープは 4 倍にして示してある．

ここで， $|u_r|$ と $|u_v|$ は，振幅が 1 の P 波が自由表面に入射したときの，自由表面上における水平方向，鉛直方向の振幅である．

計算結果

数値計算のモデルとして，厚さ 100 km，相関距離 5 km，ゆらぎの大きさ 5 %，ガウス型自己相関関数で特徴付けられる 3 次元ランダム媒質を仮定する．また，平均 P 波速度 6 km/s，平均 S 波速度 3.46 km/s とする．初期条件として，この媒質にパルスの平面 P 波が鉛直に入射するものとする．この仮定の下では，角度スペクトル $\hat{\Gamma}_2$ は解析解がすでに得られているため，角周波数に関するフーリエ変換と，波数に関する積分を数值的に行う．このモデルでの自由表面上のエンベロープを図 2. に示す．均質媒質の場合，鉛直入射した P 波のエネルギーは自由表面上では 4 倍になるため，比較のために無限媒質中のエンベロープを 4 倍にして比べている．鉛直成分の増幅率は，ほぼ 4 倍で時間的に一定であることがわかるが，水平成分の増幅率はピーク付近では 4 倍以上になっている．つまり，トランスバース成分に励起されるエネルギーに着目して，不均質構造を推定する解析をする場合，自由表面の効果を取り入れないと，不均質の強さを過大評価してしまう可能性がある．また，水平成分の増幅率は時間的に一定ではないので，自由表面上でのエンベロープは，無限媒質中のものと比べて形状もゆがむことがわかる．このゆがみのため，ピークをとる時刻は自由表面上のエンベロープの方が約 0.1 s 早くなる．

議論とまとめ

3次元ガウス型ランダム媒質において，マルコフ近似を用いたベクトル波エンベロープ導出の際に，角度スペクトルに着目することにより，自由表面の効果を取り入れることに成功した．この結果，平面 P 波がランダム媒質に鉛直入射する場合，自由表面上での鉛直成分のエンベロープは 4 倍になるだけだが，水平成分のエンベロープは形状がゆがめられることが明らかになった．これは角度スペクトルの分布から，主にエネルギーを持っている部分は，せいぜい 30 度程度の角度の散乱波だと言えるので，鉛直成分はほぼ 4 倍になるだけだと考えられる．

本研究の結果が Kubanza *et al.* (2007) で行われた解析にどのような影響を及ぼすか考察してみる．彼らが指標として用いたのは次の値である．

$$\frac{\left[\hat{I}_{x0}^P\right]^{\text{peak}}}{\left[\hat{I}_{x0}^P + \hat{I}_{y0}^P + \hat{I}_{z0}^P\right]^{\text{peak}}} \approx 1.81 \frac{\varepsilon^2}{a} Z \quad (5)$$

自由表面を考慮した場合のこの値は，無限媒質中の値に比べて約 18 % 大きくなる．そして，この変化をすべてゆらぎの強さ ε に押し付けると，自由表面を考慮しないと ε を約 8.6 % 過大評価してしまうことになる．

最後に，本研究では 3次元ガウス型ランダム媒質に P 波が鉛直に入射してくる場合を計算したが，同様にして S 波入射の場合も取り扱うことが可能である．さらに媒質をより現実的とされるフォン・カルマン型に拡張することも可能である．