地震波動伝播におけるソリトン波の高次微分幾何学

谷島　尚宏・長濱　裕幸

東北大学大学院理学研究科地学専攻地圏進化学講座
yajima@dges.tohoku.ac.jp

1. はじめに

さまざまな物理場でソリトンという非線型波動を見つけることができる。ソリトンとは、波同士の衝突に対して安定という粒子的な性質をもった孤立波のことである。孤立波はその速さや形などを変えずに伝播する。地球科学では津波やマグマの上昇過程などにソリトンを見つけることができる。さらに、地球内部を伝わる地震波などに対しても、ソリトン波の存在が指摘されている[3, 6, 8, 9]。また、理論的には岩石や粒状体の内部回転を考慮に入れることによって、地震波のソリトン方程式に含まれる分散項や非線形項が得られる[6]。しかしながら、このようなソリトンの研究に対しては、現象ごとにたくさんの方程式が個別に扱われてきた。一方で、幾何学的に見ると物理的な場は、高次接続空間（河口空間）といわれる幾何学的な空間上で一般的に表すことができる[4]。そのため、ソリトンという非線型物理場も河口空間上で考えれば、一つの表現で理解できると考えられる[12,13]。以上をもとに本研究では、地震波動伝播におけるソリトンと幾何学との関係を明らかにする。このとき、分散項や非線形項を表す河口空間の高階微分項によって、地震波の伝わる媒質の性質を表すことができると考えられる。

2. 河口空間と場の方程式

次の長さを表す式（弧長）を考える：

$$s = \int F\left(x^i, x^{(1)i}, \cdots, x^{(M)i}\right) dt, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

ここで (x^i) は座標であり、$x^{(\alpha)i} = d^\alpha x^i / dt^\alpha$、パラメーター t は時間を表す。関数 F はラグランジアンである。このとき、弧長はパラメーターの変換に対して不変でなければならない。この条件をツェルメロの条件という：$\Delta_1 F = F$ 。 ここで作用素 Δ_1 は次のように定義される：

$$\Delta_1 = \sum_{\alpha=k}^{M} \alpha\, x^{(\alpha)i} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)i}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, M. \tag{2}$$

この(1)式で定義される空間を高次接続空間（河口空間）という[2]。特に $M = 1$ のとき、フィンスラー空間といい、異方性媒質中で地震波が伝播する状況（速度が位置とその点での方向に依存する）に相当する[10,11]。このとき、ツェルメロの条件の下で変分原理によりオイラー・ラグランジュ方程式を得ることができる。さらにツェルメロの条件式と関数 F によって、ディラック方程式など場の方程式を得ることができる[4]。以下では、河口空間上で非線型物理場としてのソリトン系が表現できることを述べる。

3. ソリトンと河口空間

河口空間をソリトン系に適用するために 2 パラメーター（位置 x と時間 t）のツェルメロ条件を考える。ツェルメロ作用素として Δ_1' を次で定義する：

$$\Delta_1' = \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} + \psi_{ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{ij}} + \cdots. \tag{3}$$

ここで $\psi = \psi(x,t)$ は場の関数、ψ の添え字は偏微分を表す。例えば $\psi_i = \partial\psi / \partial x^i$ 、$\psi_{ij} = \partial^2\psi / \partial x^i \partial x^j$ などである。このとき、ツェルメロの条件式 $\Delta_1' F = F$ はラグランジアンを固有関数とする固有方程式とみなせるので、ラグランジアン F の形は指数関数となる：

$$F = e^{h(\psi,\psi_i,\psi_{ij},\cdots)}. \quad (4)$$

このラグランジアン F からソリトン方程式を得ることができる。例えば、南カリフォルニアの地震観測網で観測されたパルス上の波は大気起源であるとされ、振幅の大きな波は孤立波であると指摘されている[3]。このとき、孤立波を記述する方程式として KdV 方程式が用いられている：

$$\psi_t + (\eta + \psi)\psi_x + \mu\,\psi_{xxx} = 0. \quad (5)$$

ここで、η と μ は定数である。このソリトン方程式と河口空間の関係を得るために、ラグランジアンとして

$$F = \exp\left\{\mu\psi_{xxx} + \left(\frac{1}{2}\psi + \eta\right)\psi_x + \psi_t + \log\psi\right\}, \quad (6)$$

を考えると、ツェルメロの条件の下で KdV 方程式を得ることができる。さらに、ソリトン方程式はラックス方程式 $L_t = [B, L]$ という一般的な形で表すことができる[7]。ここで 作用素 L と B は次で定義される [1, 5]:

$$L = i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix}0 & -iq\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad B = \frac{q_t}{2q}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad q = q(x,t). \quad (7)$$

この L と B に対してラックス方程式は

$$q_{xt} - q_x q_t = 0 \quad (8)$$

と関数 q を用いて表される。このとき、関数 q として次の形のものを考える：

$$q(x,t) = \exp\left\{\int\left(A^{ij}\psi_{ij} + A(\psi)\psi\right)dt + \int\left(B^i\psi_i\right)dt\right\}. \quad (9)$$

ここで $A^{11} = \mu$, $A^{ij} = 0$ (otherwise), $A(\psi) = \psi / 2$, $B^1 = 1$, $B^2 = \eta$ と置くと、(8) 式はラグランジアン (6) 式に対するツェルメロの条件式に帰着される。したがって、ラックス方程式も河口空間のオイラー・ラグランジュ方程式になる。さらに地震波として知られているソリトン波は KdV 方程式だけでなく、非線型クライン・ゴルドン方程式[6]や非線型シュレディンガー方程式[9]によっても記述されることが知られている。これらのソリトン方程式もラグランジアン(4)式から導くことができると考えられる。そのため、ソリトン系を河口空間上で考えることにより、各種のソリトン方程式はみなオイラー・ラグランジュ方程式として表すことができる。

3. 結論

ツェルメロの条件のもと、ラグランジアンからソリトン方程式（または、その一般系のラックス方程式）が得られる。すなわち、ソリトン方程式は河口空間上のオイラー・ラグランジュ方程式とみなすことができる。したがって、地震波などに見られるソリトン場を幾何学的に見たとき、高次接続空間を用いることによって、ソリトン系を統一的に表現することができる。このとき、ソリトン的な性質を特徴付ける非線型項や分散項などは、ユークリッド空間など通常の幾何学的空間[10,11]からのはみ出しとして、河口空間の高次項の中に現れる。一方で、分散項や非線型項などは媒質の性質に関係する。例えば、粒状体などの内部回転のような微小な場の挙動を考えることで得られる[6]。そのため、河口空間の高次項を考えることで、地震波の伝わる媒質のよりミクロな性質を知ることができると考えられる。

4. 参考文献

[1] M.J. Ablowitz, J.K. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, *Stud. Appl. Math*. **53** (1974) 249-315.

[2] A. Kawaguchi, Theory of connections in the generalized Finsler manifold, *Proc. Imp. Acad. Japan* **7** (1931) 211-214.

[3] V.C. Tsai, H. Kanamori, and J. Artru, The morning glory wave of southern California, *J. Geophys. Res.* **109** (2004) B02307.

[4] K. Kondo (1968) The observational meaning of the penetration into the microscopic world by the geometry of higher-order space, in RAAG Memoirs, ed. K. Kondo, vol. 4 pp. 244- 286.

[5] W. Królikowski, On some Lagrangian model concerning the solitary waves, *Rep. Math. Phys.* **29** (1991) 123-139.

[6] A.L. Krylov, V.N. Nikolayevskii and G.A. Ell, Mathematical model of linear ultrasound by seismic waves, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **318** (1991) 1340-1345 (in Russian); T. (Doklady) USSR Acad. Sci. Earth Sci. Sec. (in Euglish).

[7] P.D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968) 467-490.

[8] F. Lund, Interpretation of the precursor to the 1960 Great Chilean earthquake as a seismic solitary wave, *Pure Appl. Geophys.* **121** (1983) 17-26.

[9] T. Stoyanov, Nonlinear dynamics of propagation wave packets from natural seismic sources, *Bulgarian. Geophys. J.* **17** (1991) 13-18.

[10] T. Yajima and H. Nagahama, Kawaguchi space, Zermelo’s condition and seismic ray path, *Nonlinear Anal.: Real World Appl.* **8** (2007) 130-135.

[11] T. Yajima and H. Nagahama, Seismic Finsler Geometry and Kawaguchi Space, In *Earthquake Source Asymmetry, Structural Media and Rotation Effects*, eds., R. Teisseyre, M. Takeo and E. Majewski, Springer-Verlarg, (2006) Ch.25, pp. 329-336.

[12] T. Yajima and H. Nagahama, Soliton systems and Zermelo condition in higher-order space, Abstract of the 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications. August 27–31, 2007, Olomouc, Czech Republic, (2007).

[13] T. Yajima and H. Nagahama, Soliton systems and Kawaguchi space. Abstract of the Conference on Differential Geometry. Lagrange and Hamilton Spaces, September 3-8, 2007, Faculty of Mathematics, Al.I.Cuza University, Iasi, Romania, (2007)