

弱い離散的な不均質による弾性波の散乱減衰

河原 純 (茨城大・理)

Scattering attenuation of elastic waves due to weak discrete inhomogeneities

Jun Kawahara (Ibaraki Univ.)

はじめに

リソスフェアのランダムな不均質性による地震波の散乱減衰を予測する主な理論は2つある。一つは、媒質の弾性波速度と密度に弱いランダムな摂動を仮定し（いわゆるランダム媒質）、それによる1次散乱エネルギーをBorn近似で評価するものである（Chernov,1960）。その際、摂動は自己相関関数により記述する。Chernovの理論は安芸博士らのグループによって地震学に導入され、走時補正の概念の付加など、独自の発展を遂げた（Aki & Richards, 1980; Sato & Fehler, 1998）。もう一つの理論は、多数の離散的な不均質（浮遊粒子、気泡、介在物など）のランダム分散系におけるコヒーレントな波動伝播と多重散乱過程を平均場近似下で扱うもので、その1次近似解はFoldy (1945) によって与えられた。Foldyの理論はKikuchi (1981) によって地殻亀裂群による散乱に応用され、その有効範囲が議論されている（河原, 2001）。

ランダム媒質モデルでは連続的な摂動が仮定されるのが通例であるが、Born近似の適用上、摂動の連続性は本質的でない。離散的な不均質分布を自己相関関数で記述し、散乱減衰のBorn近似解を求めることは形式上可能である。特に分布が十分に疎で、かつ不均質と周囲の基質との物性的コントラストが十分に低ければ、Born近似解はFoldy近似解と同等の（事実上正確な）結果を与えるはずであるが、このことを実際に確かめた例はほとんど見当たらないように思われる。前回（平成18年度の本研究集会）、2次元円形介在物群によるSH波の散乱減衰に関して両近似解の等価性を数値的に実証した。今回は3次元球形介在物群による弾性波散乱を例にとって同様な検証をおこなう。なお前回同様、走時補正は考慮しない。

3次元不均質モデル

簡単のため、単一サイズ（半径 a ）の球形介在物の一様等方ランダム分布によるP波またはS波の散乱減衰を考える。まず、介在物を取り囲む基質のP波速度、S波速度、密度をそれぞれ α_0 、 β_0 、 ρ_0 とする。媒質の物性値の空間平均が基質のものと等しくなるように、介在物の半数のP波速度、S波速度、密度をそれぞれ $\alpha_0 + \delta\alpha$ 、 $\beta_0 + \delta\beta$ 、 $\rho_0 + \delta\rho$ 、残りはそれぞれ $\alpha_0 - \delta\alpha$ 、 $\beta_0 - \delta\beta$ 、 $\rho_0 - \delta\rho$ と仮定する。またSato & Fehler (1998) に倣い、

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha_0} = \frac{\delta\beta}{\beta_0} = \frac{1}{v} \frac{\delta\rho}{\rho_0} \equiv \xi \quad (1)$$

という関係式を仮定し、介在物と基質のコントラストを単一のパラメータ ξ で記述する。高速度・高密度および低速度・低密度の介在物の分布数密度をそれぞれ $n/2$ とすると、全介在物の体積含有率は

$$C = 4n\pi a^3 / 3 \quad (2)$$

である。また、この不均質モデルをランダム媒質と見なしたときの弾性波速度の摂動の分散は

$$\varepsilon^2 = C\xi^2 \quad (3)$$

で与えられる。以下では、Foldy近似が正しいことを前提にBorn近似の有効性を議論するため、Foldy近似の前提である疎分布の仮定 $C \ll 1$ を置く。

Foldy近似解

一般に、Foldy近似解は散乱体の散乱断面積 σ を用いて次式で表される (河原 2001)。

$$Q^{-1} = n\sigma / k, \quad k = \omega / c_0$$

ここで ω は角周波数、 c_0 は入射波の速度である。 σ が散乱体毎に異なる場合は、その平均値 $\langle\sigma\rangle$ で σ を代用すればよい。特に、P波およびS波の散乱減衰はそれぞれ

$$Q_P^{-1} = Q_{PP}^{-1} + Q_{PS}^{-1}, \quad Q_{PP}^{-1} = \frac{n\langle\sigma_{PP}\rangle}{k_P}, \quad Q_{PS}^{-1} = \frac{n\langle\sigma_{PS}\rangle}{k_P}, \quad k_P = \frac{\omega}{\alpha_0} \quad (4)$$

$$Q_S^{-1} = Q_{SP}^{-1} + Q_{SS}^{-1}, \quad Q_{SP}^{-1} = \frac{n\langle\sigma_{SP}\rangle}{k_S}, \quad Q_{SS}^{-1} = \frac{n\langle\sigma_{SS}\rangle}{k_S}, \quad k_S = \frac{\omega}{\beta_0} \quad (5)$$

と表すことができる。ここで添え字のPP, PS, ...はそれぞれP-P散乱、P-S散乱、...の寄与を表す。球形介在物の散乱断面積 σ_{PP} , σ_{PS} , ...は球ベッセル関数を含む無限級数和の形で表現される (Korneev & Jordan, 1996)。なお、 Q_{PS}^{-1} と Q_{SP}^{-1} の間には一般に以下の関係が成り立つ。

$$Q_{PS}^{-1} = \frac{2\alpha_0}{\beta_0} Q_{SP}^{-1} \quad (6)$$

Born近似解

3次元等方ランダム媒質のBorn近似解の表現についてはSato & Fehler (1998)を参照されたい。一般に、 Q_P^{-1} および Q_S^{-1} のBorn近似解は共に ε^2 に比例し、かつ(4), (5)の第1式と同様な表現が可能である。同近似解の計算において必要とされるのは、摂動の3次元パワースペクトル密度関数

$$P_3(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty N(r) \sin(kr) r dr \quad (7)$$

である。ここで $N(r)$ は摂動の(規格化された)自己相関関数であり、球形介在物分布の場合、Stoyan et al. (1995)により、 $C \rightarrow 0$ の極限で

$$N(r) \approx \begin{cases} 1 - \frac{3r}{4a} + \frac{r^3}{16a^3} & (0 \leq r < 2a) \\ 0 & (r \geq 2a) \end{cases} \quad (8)$$

で与えられる (Fig. 1(a))。 (8)式を(7)式に代入すると

$$P_3(k) = \frac{12\pi}{k^6 a^3} (\sin ka - ka \cos ka)^2 \quad (9)$$

が得られる。(8)式の $N(r)$ は、 $r \rightarrow 0$ で r に関して線形的な漸近形を持つ。これは球形介在物分布が指数関数型ランダム媒質に近いパワースペクトル特性 ($k \rightarrow \infty$ で $P_3(k) \propto k^{-4}$)を持つことを意味する (Fig. 1(b); 河原 1997)。

両近似解の比較

以下、再びSato & Fehler (1998)に倣い、 $\nu = 0.8$ (Birchの法則)と $\alpha_0 / \beta_0 = \sqrt{3}$ (Poisson固体)の仮定下で両近似解を数値的に比較する。ただし以下で示すFoldy近似解は $\xi = 0.01$ の場合のみである。

Fig. 2(a)はP波の散乱減衰に関する両近似解の結果である。これによれば、 Q_P^{-1} およびそのPP散乱からの寄

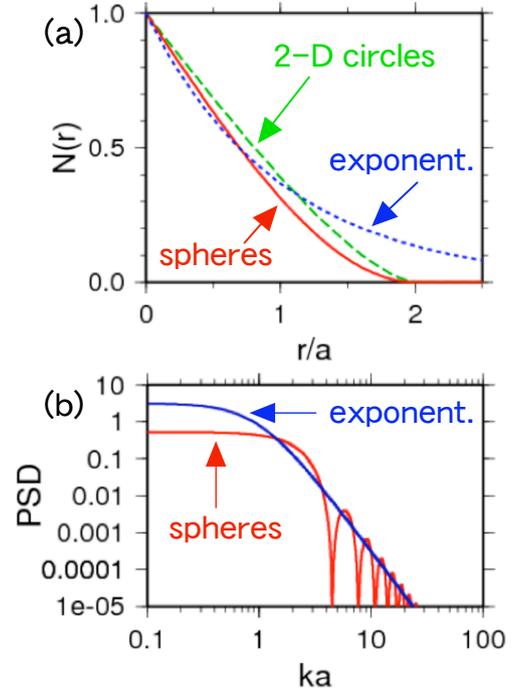


Fig.1 (a) Autocorrelation function for media with spherical inclusions with the radius a . Also shown are that for media with 2-D circular inclusions with the same radius and that for exponential random media with the correlation distance a . (b) 3-D power spectral density functions of the media with spherical inclusions and the exponential media.

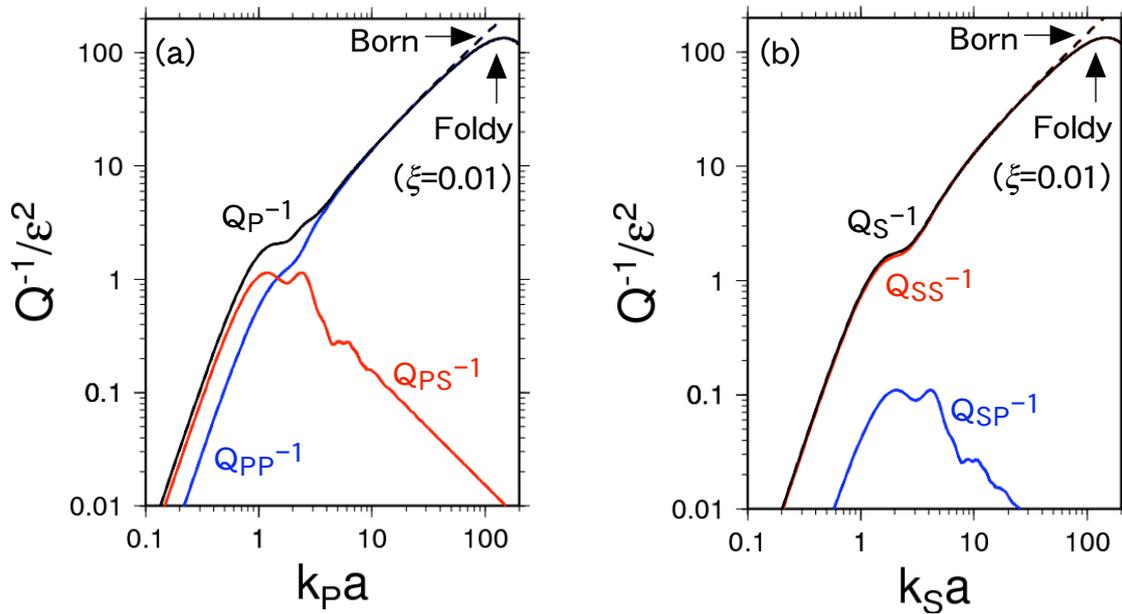


Fig.2 (a) Scattering attenuation of P waves due to spherical inclusions, divided by the variance of velocity perturbation ε^2 . Here $\nu=0.8$ is assumed. The Born-approximated solutions is depicted by the broken lines, and the Foldy-approximated solutions for $\xi=0.01$ are done by the straight ones. (b) Same as Fig. 2(a) but for scattering attenuation of S waves.

与項 Q_{pp}^{-1} のBorn近似解は、Rayleigh-Gans散乱域（単一の散乱体にBorn近似が適用できる領域；Wu, 1989） $k_{pa} \ll \xi^{-1} = 100$ で高度に一致し、またこれを若干緩和した

$$k_{pa} < \xi^{-1} \tag{10}$$

の下でも近似的に一致する。一方、条件(10)が成り立たない高波数域ではFoldy近似解が減少に転じるのに対し、Born近似解は走時揺らぎの効果（Sato & Fehler, 1998）により増大を続ける。これらは前回の結果と調和的である。これに対し、PS散乱からの寄与項 Q_{ps}^{-1} については、任意の波数に対して両近似解は高度に一致する。これは、変換散乱波が入射波の走時揺らぎに寄与しないことによる。このことも、密度のみが摂動する（走時揺らぎが生じない）場合には、Born近似解が波数によらずFoldy近似解に一致することを示した前回の結果と調和的である。

Fig. 2(b)はS波の散乱減衰に関する結果であるが、基本的にはP波散乱の場合と同様である。この場合は、常に $Q_s^{-1} \approx Q_{sp}^{-1} \gg Q_{ss}^{-1}$ が成り立つことが特徴的である。

以上の結果を前回の結果と合わせると、Born近似解がFoldy近似解と概ね一致する（即ち有効である）ための条件は、散乱体や波動の種類、空間次元によらず(10)式で表されると結論される。同条件が満たされる限り、(8)式のような適切な自己相関関数を用いることにより、弱い離散的散乱体分布をランダム媒質として扱うことが可能である。

謝辞 散乱減衰の計算に吉本和生氏とV. A. Korneev氏のプログラムをそれぞれ使わせていただきました。

参考文献

- Aki & Richards, 1980, Freeman, San Francisco.
 Chernov, 1960, McGraw-Hill, New York.
 Foldy, 1945, *Phys. Rev.*, **67**, 107-119.
 河原, 1997, *地震***2**, **50**, 135-156.
 河原, 2001, *地震***2**, **54**, 91-108.
 Kikuchi, 1981, *PEPI*, **27**, 100-105.
 Korneev & Jordan, 1996, *PAGEOPH*, **147**, 675-718.
 Sato & Fehler, 1998, Springer-Verlag, New York.
 Stoyan, Kendall & Mecke, 1995, Wiley, Chichester, UK.
 Wu, 1989, *PAGEOPH*, **131**, 605-637.