

# コーダエンベロープのセンシティブリティカーネル

前田 拓人 (防災科学技術研究所)

## 1 はじめに

コーダ波を散乱波としてはじめて定量的に解析した Aki and Chouet (1975) 以来, 平均自由行程の逆数である散乱係数が不均質な媒質を伝播する波のエネルギーを特徴付けるのに用いられてきた. 散乱係数はアンサンブル平均の概念に基づく統計的な量であり, 離散的な散乱体の数分布 (Aki and Chouet, 1975) や, Born 近似から得られた散乱波のエネルギー流速密度の体積および立体角平均 (Sato, 1984) などに関連付けられる量である. これを, 大きなスケールでは空間的に変化する量であると捉え, 散乱係数の空間分布によって不均質構造を特徴付けるコーダ波トモグラフィーが Nishigami (1991) や Asano and Hasegawa (2004) などによって行われてきた. しかし, それらの試みはいずれも一次等方散乱近似の下に定式化されており, コーダ波振幅の変化を, 経過時刻に応じた等時散乱殻上のみの不均質にマッピングしており, 多重散乱波がその中でどのように振舞うのかは未だ不明である. また, そもそも散乱係数が不均質な媒質, というものに対する散乱波, あるいはエネルギーの基礎方程式そのものが知られていないようである.

本稿では, 多重等方散乱波のエネルギーを記述する現象論的輻射伝達方程式を基礎におき, そこからの摂動を考慮することで, 散乱係数のゆらぎと観測量である地震波エネルギーとの間の量的な関係について考察する.

## 2 準備: 現象論的輻射伝達論の拡張

### 2.1 「不均質に不均質」な媒質の輻射伝達方程式

点震源に対する観測点における多重散乱波のエネルギー密度を記述する輻射伝達方程式は,

$$E(\mathbf{x}, t) = WG(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') g v E(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (1)$$

と表される (Sato and Fehler, 1998). ここで,  $E$  はエネルギー密度,  $W$  は震源における輻射エネルギー,  $g$  は散乱係数,  $v$  は媒質の平均速度である. 散乱係数は元来ある程度の空間スケールでの平均的な特徴を表す統計的な量である.  $G$  は平均波動場の Green 関数の 2 乗で, 波動エネルギーの Green 関数に相当する. 平均速度一定かつ散乱係数一定の媒質中においては,

$$G(\mathbf{x}, t; \xi, t') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \xi|/v)}{4\pi v |\mathbf{x} - \xi|^2} \exp[gv(t - t')] H(t - t') \quad (2)$$

と表される. ここで,  $H$  はステップ関数である. 指数関数部分は伝播に伴う散乱減衰項を表しており, Green 関数自体に多重散乱の影響が含まれている. この項は, 現象論的には全エネルギーの保存則から要求されるものである. したがって, 散乱係数はエネルギーの Green 関数を通じて, 直達波項および散乱波項の双方に影響を及ぼしている.

元来, 散乱係数という量はある空間範囲における平均的な特徴を表す量であり, 一定以下の細かなスケールでの微小な変動に物理的な意味は無い. そこで, 全空間を波長より十分大きなスケール  $L$  を持つ無数のブロックに区切り, 単一のブロックの中では散乱係数は一定でありながら, 異なるブロック間では異なる散乱係数を持ちうるような媒質を考える.  $i$  番目のブロックにおける散乱係数を  $g_i$  とすると, このとき, 「不均質に不均質」な輻射伝達方程式は,

$$E(\mathbf{x}, t) = WG(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) + v \sum_{i=1}^{\infty} \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') g_i E_i(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (3)$$

と拡張することができるであろう. ここで  $E_i$  は  $i$  番目のブロック内のエネルギー密度で,  $E(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} E_i(\mathbf{x}, t)$  である. ただし, エネルギーの Green 関数は,

$$G(\mathbf{x}, t; \xi, t') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \xi|/v)}{4\pi v |\mathbf{x} - \xi|^2} \exp[f(g)] H(t - t') \quad (4)$$

のように, 幾何減衰項と, 因果性を表す  $\delta$  関数に加えて, 何らかの散乱減衰項を持つことが期待される. Green 関数が因果性を持つため, (3) 式におけるブロックについての和は, 震源-散乱体-観測点を速度  $v$  で伝播できる範囲内, すなわち一次散乱波の等

時散乱殻内にあるブロックのみに事実上限定される。散乱減衰項は、全空間におけるエネルギーの総和が時間に依らず一定である、というエネルギー保存則の条件から原理的には得ることができるはずである。(3)式を空間について Fourier 変換、時間について Laplace 変換を行うと、

$$\hat{E}(\mathbf{k}, s) = W\hat{G}(\mathbf{k}, s) + \hat{G}(\mathbf{k}, s) \sum_{i=1}^{\infty} g_i \hat{E}_i(\mathbf{k}, s) \quad (5)$$

と表される。全エネルギーは波数領域において  $\mathbf{k} = 0$  とおくことで得られる。ただし、このままでは右辺に各ブロックのエネルギーの重み付き和が現れるため、全エネルギーを直接評価することができない。そこで、 $i$  番目のブロックにおける全エネルギーが、全体のエネルギーに対してスカラー量の重み係数  $f_i$  を用いて、 $\hat{E}_i(0, s) = f_i \hat{E}(0, s)$  と表されると仮定すると、上式はエネルギーについて解くことができる。この条件のもと、全エネルギーの保存則を適用すると、エネルギーの Green 関数は、

$$G(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, t') = \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|/v)}{4\pi v |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} \exp\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i f_i\right)v(t - t')\right] H(t - t') \quad (6)$$

となる。つまり、散乱係数が空間的に不均質な媒質の散乱減衰は、局所的なエネルギーによって重み付けられた散乱係数の空間平均によって得られることが分かる。以下の議論では、数理的な簡便性のため、上記のブロックの大きさを仮想的に無限小に取り、散乱係数を場所の連続量として取り扱った輻射伝達方程式

$$E(\mathbf{x}, t) = WG(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) + v \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') g(\mathbf{x}') E(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (7)$$

についての考察を行う。

## 2.2 輻射伝達方程式の Green 関数表現

今までの議論では震源は特定の場所に局在していたが、後の議論で用いるために空間的に広がりを持つ震源に対する輻射伝達方程式について考察する。広がった震源に対しての輻射伝達方程式は、ある位置・時間からのエネルギー輻射の時間変動震源時間分布密度関数  $\dot{w}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$  で表すことで、

$$E(\mathbf{x}, t) = \int_V \int_{-\infty}^{\infty} \dot{w}(\boldsymbol{\xi}, \tau) G(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} d\tau + \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') g(\mathbf{x}') v E(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \quad (8)$$

と書けるであろう。明らかに輻射伝達方程式は震源時間密度分布関数に関して線形であるから、

$$F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) + \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') g(\mathbf{x}') v F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{x}' dt' \quad (9)$$

を満たす解  $F$  が分かれば、エネルギー密度関数は

$$E(\mathbf{x}, t) = \int_V \int_{-\infty}^t \dot{w}(\boldsymbol{\xi}, \tau) F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} d\tau \quad (10)$$

のように畳み込み積分の形で書ける。したがって、関数  $F$  は輻射伝達方程式の Green 関数として扱うことができる。実際、 $F$  はインパルス  $\dot{w} = \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_S) \delta(\tau - t_S)$  に対する (8) 式の解である。また、エネルギーの Green 関数  $G$  に相反性が成立するならば、 $F$  に対しても相反性

$$F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = F(\boldsymbol{\xi}, -\tau; \mathbf{x}, -t) \quad (11)$$

が成立することが輻射伝達方程式の多重散乱展開から確かめることができる。

## 3 摂動論に基づくセンシティビティカーネルの導出

いま、散乱係数の空間的ゆらぎが

$$g(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) + \delta g(\mathbf{x}) \quad (12)$$

とされたときに、エネルギー密度の摂動を  $F \equiv F_0 + \delta F$  と書こう。ただし、条件として、

$$\langle \delta g(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad (13)$$

であることを要請する。また、散乱係数が  $g_0$  の場合の輻射伝達方程式の解  $F$  は既知であるとする。これを (9) に代入すると、

$$F_0(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) + \delta F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = G(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) + \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') [g_0(\mathbf{x}) + \delta g(\mathbf{x})] v [F_0(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) + \delta F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau)] d\mathbf{x}' dt' \quad (14)$$

を得る。厳密には、(6) 式で見たように、Green 関数  $G$  も散乱減衰項を通じて散乱係数の摂動に伴う変化を持つ。しかし、その変化は散乱係数のゆらぎを空間的に平均化されたものであると考えられ、散乱係数の摂動の空間平均が 0 であるという (13) 式の仮定から、Green 関数の摂動の寄与は小さいことが期待できる。

$F_0$  が散乱係数  $g_0(\mathbf{x})$  に対する輻射伝達方程式を満たすことを考慮しつつ、2 次以上の摂動項を無視すると、

$$\delta F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \delta g(\mathbf{x}') v F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{x}' dt' + \int_V \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t') g_0(\mathbf{x}) v \delta F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{x}' dt' \quad (15)$$

を得る。(15) 式もまた散乱係数  $g_0(\mathbf{x})$  に対する輻射伝達方程式であり、その震源時間分布密度関数は、

$$\dot{w}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \equiv \delta g(\mathbf{x}') v F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) \quad (16)$$

と表される。したがって、(15) 式の解は、(10) 式から、

$$\delta F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \int_V \int_{-\infty}^t F(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \delta g(\mathbf{x}') v F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) d\mathbf{x}' dt' \quad (17)$$

と書くことができる。ここで、因果律から時間積分の領域を制限している。しかし、この表現では全空間のすべてを震源とするコーダエンベロープを計算、足し合わせなければならず、このままでは現実的には評価不能である。そこで、 $F$  の相反性 ((11) 式) を用いて、

$$\delta F(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \int_V K(\mathbf{x}', t') \delta g(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad K(\mathbf{x}', t') \equiv \int_{-\infty}^t F(\mathbf{x}', -t'; \mathbf{x}, -t) v F(\mathbf{x}', t'; \boldsymbol{\xi}, \tau) dt' \quad (18)$$

と書き直そう。(18) 式は、ある場所における散乱係数のゆらぎに伴う観測エンベロープ振幅の変化 (センシティブリティカーネル)  $K$  は、震源と観測点それぞれをから輻射される地震波エンベロープの相互相関の時間積分を取ることによって評価できるということを示している。

## 4 準解析解を用いた数値例

いま、一様にランダムで、背景速度一定の媒質から散乱係数がゆらぐことを考える。このときのセンシティブリティカーネル (18) を、Paasschens (1997) の準解析解を用いて計算する。Paasschens (1997) の解では直達波部分はデルタ関数で表現されるが、数値計算上、有限時間長の震源時間関数を考慮し、時間長 5 秒の箱型関数として評価した。図 1 に速度  $v = 5\text{km}$ 、散乱係数  $g = 0.005\text{km}^{-1}$  (平均自由時間 50 秒) の媒質におけるセンシティブリティカーネルの時間スナップショットを示した。図中星印と逆三角形がそれぞれ震源と観測点をあらわし、震源距離は 50km である。計算はすべて 3 次元無限空間内で実行しているが、ここでは震源と観測点を含む断面の結果のみを示した。

経過時間が比較的短いうちには、震源と観測点を焦点とする楕円 (等時散乱殻) 上に非常に強い感度があり、観測されるエンベロープ振幅の変化はおもにこの曲線状の散乱係数の変化によってもたらされるということが確認できる。しかし、経過時間の増加とともに多重散乱が卓越するため、等時散乱曲線上の感度振幅は相対的に小さくなる。その代わりに、震源および観測点周辺の部分の感度が卓越する様子が確認できる。特に観測点と震源の場所においては、平均自由時間より短い経過時間においても十分に強い感度をもっている。平均自由時間より短い経過時間内では、従来の解析で一次散乱波が卓越するとの想定の下に解析が行われていたため、震源や観測点近傍の散乱係数の変化を等時散乱曲線上の変化に人為的に押し付けてしまっている可能性がある。

## 5 まとめと今後の課題

本研究では、従来の現象論的輻射伝達論の延長線上に立ち、多重散乱を考慮した場合のコーダエンベロープのセンシティブリティの形状を示した。震源と観測点をそれぞれ仮想震源とする波の干渉によってセンシティブリティが計算できる、という手法は、その本質において長周期地震学で最近行われている Adjoint 法 (e.g., Tromp *et al.*, 2005) と同じものである。散乱係数の空間平均が一定であり、全散乱減衰が変化しない際には適用できないこと、実効 Green 関数と散乱減衰を導出した際の近似の妥当性が十分に評価されていないなど、まだ検討課題も多いが、今後の理論的進展と DSMC 法 (Yoshimoto, 2000) などの高速数値計算法を併

$v=4$  [km/s],  $g_0=0.005$  [1/km], mean free time=50 [s]

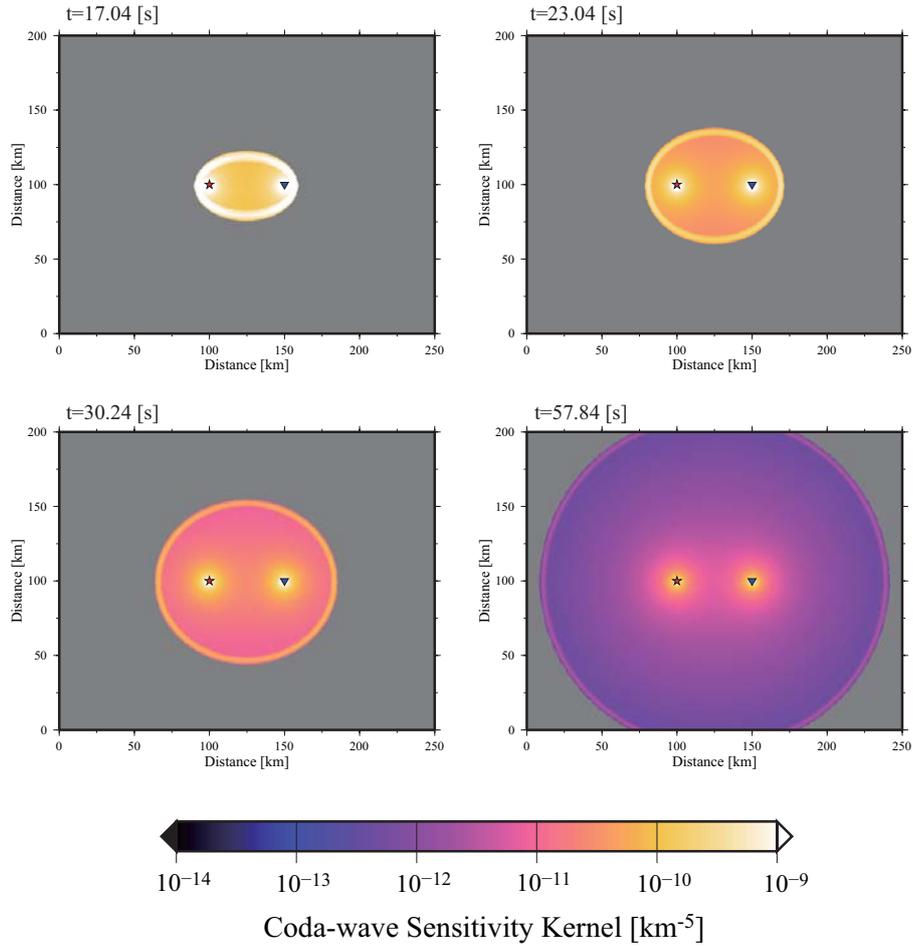


図1 コーダエンベロープのセンシティブリティカーネルの計算例。震源距離 50km, 速度  $v = 5$ km, 散乱係数  $g = 0.005\text{km}^{-1}$  の3次元媒質におけるセンシティブリティカーネルの、震源および観測点を含む2次元断面の時間スナップショットを濃淡で示している。星印および逆三角形がそれぞれ震源および観測点を表す。

用することで、多重散乱を正しく考慮した散乱係数トモグラフィーの実現が期待される。

## 参考文献

- Aki, K., and B. Chouet, Origin of coda waves: Source, attenuation and scattering effects, *J. Geophys. Res.*, *80*, 3322–3342, 1975.
- Asano, Y., and A. Hasegawa, Imaging the fault zones of the 2000 western Tottori earthquake by a new inversion method to estimate three-dimensional distribution of the scattering coefficient, *J. Geophys. Res.*, *109*, B06306, doi:10.1029/2003JB002761, 2004.
- Nishigami, K., A new inversion method of coda waveforms to determine spatial distribution of coda scatterers in the crust and uppermost mantle, *Geophys. Res. Lett.*, *18*, 2225–2228, 1991.
- Paasschens, J. C. J., Solution of the time-dependent Boltzmann equation, *Phys. Rev. E*, *56*(1), 1135–1141, 1997.
- Sato, H., and M. Fehler, *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*, AIP Press/Springer Verlag, New York, 1998.
- Sato, H., Attenuation and envelope formation of three-component seismograms of small local earthquakes in randomly inhomogeneous lithosphere, *J. Geophys. Res.*, *89*, 1221–1241, 1984.
- Tromp, J., C. Tape, and Q. Liu, Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels, *Geophys. J. Int.*, *160*, 195–216, 2005.
- Yoshimoto, K., Monte-Carlo simulation of seismogram envelope in scattering media, *J. Geophys. Res.*, *105*, 6153–6161, 2000.