Markov近似に基づく3次元非等方ランダム弾性媒質における
ベクトル波形エンベロープの統計的導出ーガウス型スペクトルの場合ー

佐藤春夫　（東北大・院・理）

リソスフェアを伝わる高周波数（>1 Hz）の地震波は，固体地球の構造の不均質による回折や散乱の効果を強く受ける．震源での輻射は短時間であっても，伝播距離の増加と共に,その波形は崩れ，主要動の継続時間は増大する．ランダム媒質におけるパルス波のエンベロープ拡大は，これまで主として放物型方程式に対するマルコフ近似という確率統計的方法に基づいて研究されてきたが[Ishimaru (1978), Sato (1989)]，最近ではベクトル弾性波動の3成分エンベロープの導出へと拡張されるようになってきた[Sato (2006, 2007)]．Ｐ波の場合にはTransverse成分に散乱波が励起されることも，この近似で説明できる．この近似の妥当性は，差分法によるシミュレーションを用いて詳しく調べられている [Korn and Sato (2005), Sato and Korn (2007)].

深層井における坑井検層や地殻の精密な速度トモグラフィーなどから，地殻構造の不均質の尺度は非等方的であって，鉛直方向の相関距離は水平方向と比べて短いことが知られている．しかし，波動のエンベロープ拡大に関する従来の研究のほとんどは，ランダム媒質に等方性を仮定したものであった．ランダム媒質の非等方性がエンベロープ拡大にどのような影響を与えるかは未だ明らかではない.

本研究では，マルコフ近似に基づき，非等方的なガウス型自己相関関数(1)で記述される３次元ランダム媒質の中を伝播するパルス波のエンベロープを導出し，その特徴を調べる.

$$R(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon^2 e^{-\frac{x^2}{a_x^2}-\frac{y^2}{a_y^2}-\frac{z^2}{a_z^2}} \tag{1}$$

Ｐ波が点震源から等方に輻射される場合を考えることにする．波動の大局的進行方向(以下ではｚ方向に選ぶ)に直行する面上で，２周波数相互相関関数を定義する．波動の大局的進行方向が非等方的ガウス型自己相関関数の３つの主軸の一つに一致する場合には，２周波数相互相関関数の進行方向に関する放物型の発展方程式を導くことができる．　初期条件 ${}_0\Gamma_2\left(\mathbf{x}_{\perp d}, r=0, \omega_c, \omega_d\right) = 1/(4\pi)$のもとで，２周波数相互相関関数の発展方程式を以下のように解析的に解くことができる.

$${}_0\Gamma_2\left(r, x_d, y_d\right) = \frac{\sqrt{\frac{a_z}{a_x}s_0}\sqrt{\frac{a_z}{a_y}s_0}\, e^{\frac{2V_0 k_c{}^2 t_M x_d{}^2}{s_0{}^2 r}\left[\frac{a_z}{a_x}s_0 \cot\left(\frac{a_z}{a_x}s_0\right)-1\right]+\frac{2V_0 k_c{}^2 t_M y_d{}^2}{s_0{}^2 r}\left[\frac{a_z}{a_y}s_0 \cot\left(\frac{a_z}{a_y}s_0\right)-1\right]}}{4\pi\sqrt{\sin\left(\frac{a_z}{a_x}s_0\right)\sin\left(\frac{a_z}{a_y}s_0\right)}} \tag{2}$$

ここで，波数　$k_c = \omega_c / V_0$，特徴的時間$t_M = \sqrt{\pi}\varepsilon^2 r^2 / (2V_0 a_z)$，パラメータ$s_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{t_M \omega_d}$ である.

3 成分の波動の強度の時間変化，すなわち振幅の２乗平均エンベロープは，この２周波数相互相関関数のフーリエ変換で与えられる.

$$\hat{I}_x^P\left(r,t,\omega_c\right)=\hat{I}_y^P\left(r,t,\omega_c\right)=\frac{1}{2\pi r^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_d e^{-i\omega_d\left(t-r/V_0\right)}e^{-\sqrt{\pi}\varepsilon^2 a\omega_d{}^2 r/\left(2V_0{}^2\right)}\left[-\frac{1}{k_c{}^2}\partial_{x_d}{}^2\,{}_0\Gamma_2\right]_{\mathbf{x}_{\perp d}=0} \tag{3}$$

$$\hat{I}_z^P\left(r,t,\omega_c\right)=\frac{1}{2\pi r^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_d e^{-i\omega_d\left(t-z/V_0\right)}e^{-\sqrt{\pi}\varepsilon^2 a\omega_d{}^2 r/\left(2V_0{}^2\right)}\left[\left(1+\frac{\Delta_{\perp d}}{k_c{}^2}\right){}_0\Gamma_2\right]_{\mathbf{x}_{\perp d}=0} \tag{4}$$

一般的には FFT を用いて２乗平均エンベロープを計算するが，特に非等方的ガウス型自己相関関数が進行方向の周りに回転対称の場合には，フーリエ変換を解析的に実行できる．その場合，振幅の２乗平均エンベロープは楕円テータ関数を用いて表すことができる．なお，S 波のエンベロープについても同様の定式化が可能である．

最近，Saito [2006]は 2 次元非等方ランダム媒質におけるエンベロープ拡大を考察しているが，これは 3 次元における回転対称の場合に対応するものである．一般に，エンベロープの最大値の着信の初動からの遅れやエンベロープの時間幅は，ランダム媒質の非等方性のパラメータと波動の大局的な進行方向に依存し，伝播距離の 2 乗に比例して増加する．特に，速度ゆらぎの二乗平均値や進行方向の相関距離，非等方的な相関距離の相対比が重要なパラメータとなる．

地殻の不均質性に見られるように水平方向の相関距離が鉛直方向のそれよりも長い場合（図 1 を参照)，水平方向に伝播（Ray H）する波動のエンベロープ拡大は鉛直に伝播(Ray V)する波動のそれよりも大きいことが導かれる．これは，ランダム不均質に非等方性がある場合，地震波のエンベロープ拡大を解析する時には波線が鉛直となす角度が重要であることを示唆している．

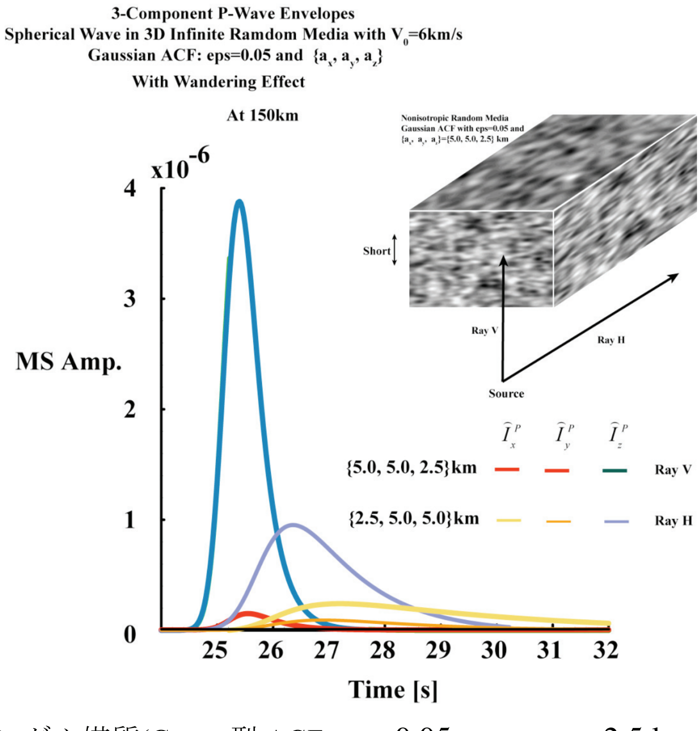

図１．非等方ランダム媒質(Gauss 型 ACF，$\varepsilon = 0.05$，$a_x = a_y = 2.5$ km，$a_z = 5$ km，$V_p = 6$km/s)における，震源距離 150km でのＰ波の 3 成分ＭＳエンベロープ．震源はデルタ関数型のＰ波等方輻射.