

2次元空隙群によるSH波の散乱減衰と分散

大野大地、河原 純（茨城大・理）
蓬田 清（北大・理）

はじめに

リソスフェアの不均質による地震波の散乱は、地震波の直達部分の減衰と速度分散の原因となる。この現象を数理的に扱うための不均質媒質モデルの一つに、離散的散乱体（以下、散乱体）のランダムな空間分布がある。具体的な散乱体としては、地殻に無数に存在する亀裂や、岩相の不連続な変化を近似的に表すものとして空隙や介在物などが仮定される。講演者らとその同僚は以前、2次元平行亀裂群による地震波の散乱減衰とそれに付随する速度分散（以下、減衰と分散）を、多重散乱無視の近似下で解析的に評価し（例えばKawahara and Yamashita, 1992）、さらにその手法を円形ないし楕円形空隙群の場合に拡張した（河原・蓬田, 1996）。一方、2次元平行亀裂群によるSH波の散乱のシミュレーションをさまざまなパラメーターに対して多数回実行し、減衰と分散の測定をおこなった（Murai et al., 1995）。その一連の結果はいずれもKawahara and Yamashita (1992)の理論解とよく一致した。空隙群に関する数値実験の例としてはBenites et al. (1992)があり、彼らの求めた減衰は河原・蓬田 (1996)の理論解と符合した。以上のことは、上記の1次散乱理論の正当性を示唆する。しかしながら、Benites et al. (1992)はわずか1例の円形空隙分布モデルについて減衰を測定したに過ぎず、かつ分散は測定していない。また楕円形空隙分布に関する同様な実験的測定はこれまで全くおこなわれていない。そこで本研究では、Benites et al. (1992)と同様な実験を様々な空隙分布モデルについておこなって減衰と分散を測定し、河原・蓬田 (1996)の1次散乱理論と比較する。

1次散乱理論

最初に河原・蓬田 (1996)をレビューする。以下、問題を2次元SH波の散乱に限定する。まず、角周波数 ω 、波数 $k = \omega / \beta$ の単位振幅の単色平面SH波 u^0 が、1個の散乱体に入射する問題を考える（ β は媒質のSH波速度）。このとき、散乱体から放射される散乱波の振幅は十分遠方で次の形を取る。

$$u^S = f(\phi) \exp(ikr - i\omega t) / \sqrt{r} \quad (1)$$

ここで r は散乱体～観測点間距離、 ϕ は u^0 の伝播方向から測った散乱体に対する観測点の方位角であり、 $f(\phi)$ は散乱振幅と呼ばれる。次に、このような散乱体が多数、一様かつランダムに分布する領域を仮定し、その外部から u^0 が入射する場合に、領域内部を実際に伝わる波動場 u を考える。散乱体分布が十分に疎で、多重散乱の効果が無視できる場合には、 u の波形のアンサンブル平均（平均波） $\langle u \rangle$ の減衰係数 $Q^{-1}(k)$ と位相速度 $V(k) = \beta - \Delta V(k)$ は次式で与えられることが示される（河原, 2001）。

$$Q^{-1}(k) \cong \frac{2\nu}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \operatorname{Im} \frac{f(0)}{\sqrt{i}}, \quad \frac{\Delta V(k)}{\beta} \cong \frac{\nu}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \operatorname{Re} \frac{f(0)}{\sqrt{i}} \quad (2)$$

ここで ν は散乱体の分布数密度であり、 Re 、 Im は実部と虚部を表す。それゆえ、散乱体のランダム分布による減衰と分散の平均値（期待値）の評価は、1個の散乱体の前方散乱振幅 $f(0)$ の計算に帰着する。半径 a の円形空隙の場合、 $f(0)$ は次のような円柱関数を含む無限級数和で表される（Pao and Mow, 1973）。

$$f(0) = i \sqrt{\frac{2i}{\pi k}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[J_m'(ka) / H_m^{(1)'}(ka) \right] \quad (3)$$

ここで「 $'$ 」は指数による微分を表す。上式は $ka < 2$ では良い収束性を示し、数値計算に適する。同様にし、空隙が楕円形の場合にはMathieu関数を含む級数和と表現が導かれるが、Mathieu関数の評価があまり容易でないため、 $f(0)$ の計算式としては便利でない。ここではその代わりに、Benites et al. (1992)の境界積分法を用いて楕円形空隙の $f(0)$ を計算する。この方法では、散乱体の境界面近傍に分布させた N 個の仮想震源から放射される円筒波（グリーン関数）の総和として、散乱波を近似的に表現する。各仮想震源の重み A_j ($j = 1 \sim N$)は空隙の境界条件（ここでは応力0）を満たすよう最小二乗法的に決める。このとき、

$$f(0) \cong \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2i}{\pi k}} \sum_{j=1}^N A_j \exp(-ikx_j) \quad (4)$$

により $f(0)$ が求められる。ただし x_j は、 u^0 の伝播方向に x 軸を採ったときの各仮想震源の x 座標を表す。この方法は原理的に任意の形状の空隙に応用できる利点がある。

ちなみに上述の楕円形空隙の $f(0)$ の解析的表現から、低周波極限での $Q^{-1}(k)$ と $\Delta V(k)$ の漸近形が以下の

ように求められる (a, b はそれぞれ楕円の長径と短径、 θ は u^0 の伝播方向と楕円の短軸方向の為す角)。

$$Q^{-1} \cong \frac{\pi^2 v k^2}{4} \left[a^2 b^2 + \frac{1}{2} (a+b)^2 (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \right], \quad \frac{\Delta V}{\beta} \cong \frac{\pi v}{2} \left[-ab + (a+b)(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta) \right] \quad (5)$$

上式は $b=a$ で円形空隙の場合に、 $b=0$ で亀裂の場合にそれぞれ帰着する。また高周波極限での $Q^{-1}(k)$ の漸近形は、空隙の形状によらずその幾何断面積 σ_G だけに依存することが示される(河原, 2001)。

$$Q^{-1} \cong 2v\sigma_G/k \quad (6)$$

数値実験とその結果

前項で述べた理論と比較すべく、Benites et al. (1992)と同様な数値実験を多数おこなった。まず、Benites et al. (1992)と全く同じ条件として、直径 $d=2a$ の円形空隙を乱数を用いて横 $80d \times$ 縦 $30d$ の領域に一樣ランダムに分布させた(ただし空隙の境界面同士が $0.2a$ より接近しないよう制約を加えた)。そして領域の上端に101個の観測点を等間隔に配置し、下端から平面リッカー波を垂直に入射させた。観測点と空隙との重なり合いを防ぐため、測線(領域上端)直下の幅 a の帯状領域から空隙を排除した。それゆえこの場合の実効分布密度を $\varepsilon \equiv va^2 = 50 \times 0.5^2 / 80 / (30 - 0.5) \cong 0.0053$ と定義することにする。次に、各観測点で得られた波形に中心周波数 f_C のオクターブ幅のバンドパスフィルターをかけた後、直達波部分の最初の主要なピークの振幅と走時を測定し、これから Q^{-1} と ΔV を評価した。最後に、測線にわたってそれらの平均と標準偏差を求め、周波数 f_C における減衰と分散の期待値および誤差と見なした。ただし領域の左右端から外部へのエネルギーの流出の効果を除くため、測線の両端から20点分(距離 $\sim 16d$)ずつのデータは捨てることにした。この操作を4種類の f_C 値についておこなった。以上の実験を、異なる乱数の種に対応する4通りの空隙分布モデルについておこなった(ケース1)。その結果をBenites et al. (1992)のものとともに図1に示し、併せて前項で述べた理論による予測値を曲線で示した。図によれば、結果は概ね理論値とよい一致を見せている。ただし高波数域における ΔV の実験値は誤差が大きく理論値との比較が困難であるが、これは理論値が測定の分解能(ここでは波動シミュレーションの時間刻み幅1個分の走時の遅れに対応する量で定義されるものとする)以下であることを反映すると考えられる。

次に、多重散乱の効果を調べるため、円形空隙の分布密度を増加させながら同様な実験をおこなった。ただし計算時間の節約のため、空隙数を増やす代わりに分布領域を圧縮することにした。まず領域を縦方向に圧縮し、 $80d \times 10d$ ($\varepsilon \cong 0.016$)として実験をおこなった(ケース2)が、ケース1と全く同様な結果が得られた(省略)。次に領域を横方向にも圧縮し $25d \times 10d$ ($\varepsilon \cong 0.053$)としてみた(ケース3)。ただしこの場合に限り、データを捨てる観測点は測線の両端からそれぞれ30点(距離 $\sim 7.5d$)ずつとした。その結果を図2に示す。この場合は、理論値に比べると Q^{-1} は全般的に(特に $ka \sim 1$ で)若干小さく、 ΔV は低波数側で小さい値を取る。さらにケース3と同程度の分布密度の例として、縦方向にのみ圧縮して $80d \times 3d$ ($\varepsilon \cong 0.063$)とした場合をケース4としてみたが、得られた結果(省略)は減衰・分散とも誤差が拡大し、その範囲内で理論値との有意な差は認められなかった。

さらに参考のため、ケース1~4のそれぞれと同じ分布モデルについて、各空隙からの1次散乱波のみを計算し、それを入射波と足し合わせたものを全波動場として、改めて Q^{-1} と ΔV を評価した。このような多重散乱波の除去は、Benites et al. (1992)の方法では容易に実現できる(Yomogida and Benites, 1995)。その結果、ケース1, 2, 4では誤差がやや大きいものの、多重散乱を考慮した場合と大差なく、従って理論曲線とも符合した(省略)。それに対しケース3では Q^{-1} が小さ過ぎて安定して求められず、 ΔV は高周波側で理論値より有意に大きな値を取った(図3)。

最後に、ケース1について空隙の形を長径 a 、短径 $b=0.5a$ の楕円に替えて同じ実験をおこなった。楕円の長軸方向はすべて互いに平行とし、その傾き θ が 0° 、 45° 、 90° の3通りについてそれぞれ実験をおこなった。その結果の一部を図4に示す。円形の場合と同様、高波数域での ΔV を除けば実験と理論は概ねよい一致を示している。

考察

空隙の分布密度が十分低い場合(ケース1, 2)、空隙の形状によらず実験と理論は概ねよい一致を見せた。このことを亀裂散乱に関するMurai et al. (1995)の結果と併せれば、多重散乱が支配的で無い場合には、少なくとも2次元SH波散乱に関する限り1次散乱理論が普遍的に有効であると推論できる。Murai et al. (1995)の実験結果が $\varepsilon \leq 0.02$ で1次散乱理論とよい一致を示している点を考え併せれば、1次散乱理論は少なくとも $\varepsilon \sim 0.02$ 程度までは有効であると思われる。2次元P, SV波散乱や3次元の場合についても同様な結論が予想されるが、その検証は今後の課題である。

一方、ケース3の結果は、多重散乱の効果が散乱による減衰と分散を抑制するセンスであることを示唆する。過去の理論的研究のいくつかは、2次散乱の効果が1次散乱の効果を減殺するセンスであることを示しており（河原, 2001）、今回の結果はこれと矛盾はしない。しかし4回の実験毎に得られた期待値は、それぞれが持つ誤差の小ささに比して期待値同士のばらつきがやや大きく、精度に問題がある。その要因の一つとして、統計的に安定な期待値を得るのに十分な測線長が確保されていない可能性が挙げられる。またケース3では減衰が非常に強い（ Q^{-1} の理論値が $ka \sim 1$ で0.1を越える）、一部の観測点で直達波が原形を留めないほどに変形し、 Q^{-1} や ΔV の客観的決定に困難が生じたが、このことも要因の一つかも知れない。これを回避するための直接的な方法は空隙分布領域を縦方向に縮めて波の伝播距離を短くすることである。ケース4はこれを意図したものであるが、上述のように各期待値のそれぞれの誤差が大きくなってしまった。このことは、散乱体の分布領域が散乱体の寸法に比べて体積的に十分な広がりを持たないと、不均質媒質としての本来の性質を示さないことを意味するのかも知れない。以上の問題は、不均質性の強い領域での散乱による減衰と分散を定義することの難しさを示唆する。

また、ケース3で1次散乱波のみ計算した場合の Q^{-1} 値（図3）が、多重散乱を考慮した場合のもの（図2）より大幅に小さい点はYomogida and Benites (1995)の結果と調和的である。しかしその結果、後者よりも前者の方がはるかに1次散乱理論の予測と食い違っている点は一見奇妙である。これは、1次散乱理論が空隙への実質的な入射波を $\langle u \rangle$ と仮定し、 $\langle u \rangle$ が伝播とともに減衰することで他の空隙の影響をある程度考慮しているのに対し、1次散乱波のシミュレーションでは全空隙に等しく u^0 を入射させるために Q^{-1} を過小評価してしまうものと解釈できる。散乱による減衰と分散を考える上で多重散乱と1次散乱の効果を分離して議論する際は、上記の点に注意を要する。

参考文献

- Benites, Aki and Yomogida, 1992, *Pure Appl. Geophys.*, **138**, 353-390.
 河原, 2001, 地震2, **54**, 91-108.
 Kawahara and Yamashita, 1992, *Pure Appl. Geophys.*, **139**, 121-144.
 河原・蓬田, 1996, 地球惑星科学関連学会1996年合同大会予稿集, 331.
 Murai, Kawahara and Yamashita, 1995, *Geophys. J. Int.*, **122**, 925-937.
 Pow and Mow, 1973, *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane Russak, New York.
 Yomogida and Benites, 1995, *Geophys. J. Int.*, **123**, 471-483.

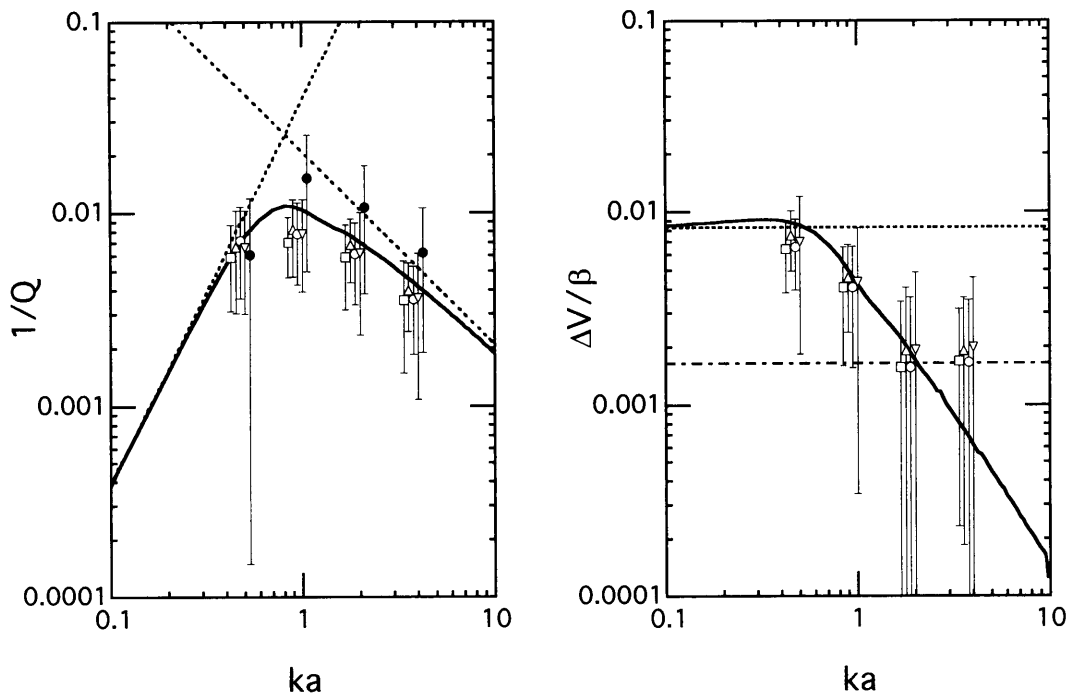


図1. 円形空隙群（ケース1, $\varepsilon \approx 0.0053$ ）による Q^{-1} （左）と ΔV （右）。 $\square, \triangle, \circ, \nabla$ は今回の実験結果、 \bullet はBenites et al. (1992)による結果、エラーバーは実験値の標準偏差。見やすさのため \circ のみを正確な位置にプロットし、他は左右にずらしある。太い実線は1次散乱理論による予測値（本文(2)式）、細い点線はその漸近形（本文(5), (6)式）。鎖線は ΔV の測定の分解能を表す（本文参照）。

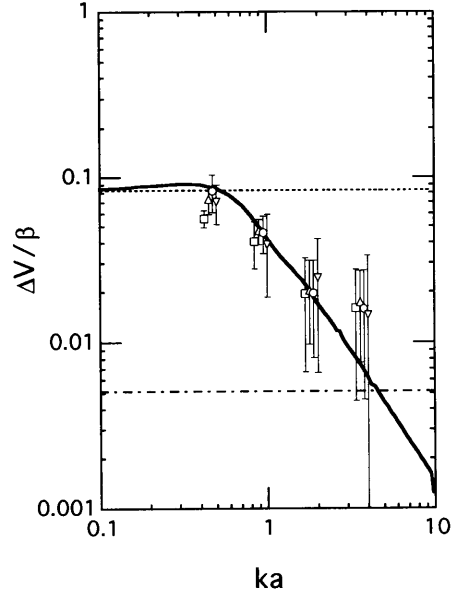
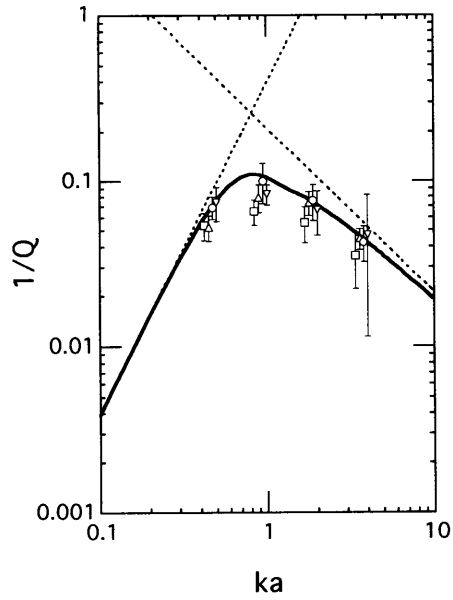


図2. 円形空隙群 (ケース3, $\varepsilon \approx 0.053$) による Q^{-1} と ΔV . 図の見方は図1と同様。

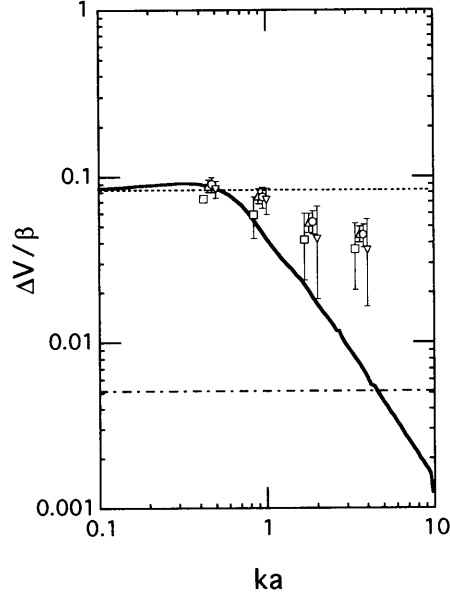
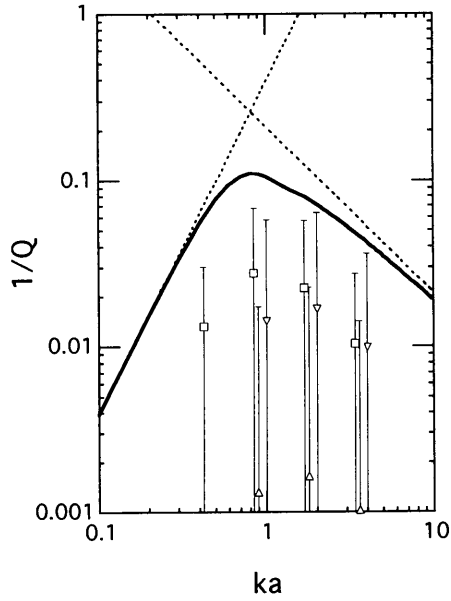


図3. ケース3で1次散乱のみを考慮した場合の Q^{-1} と ΔV . 図の見方は図1と同様。

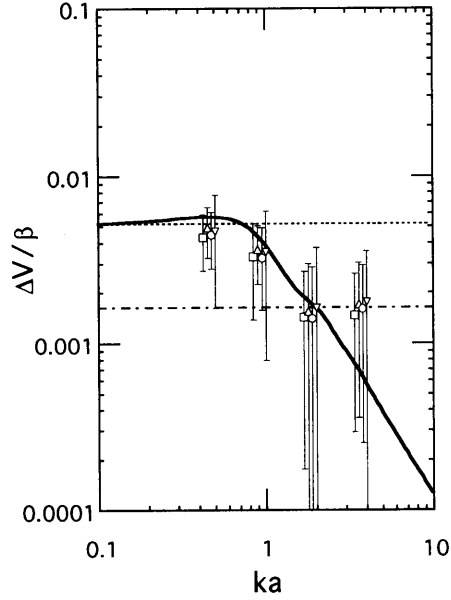
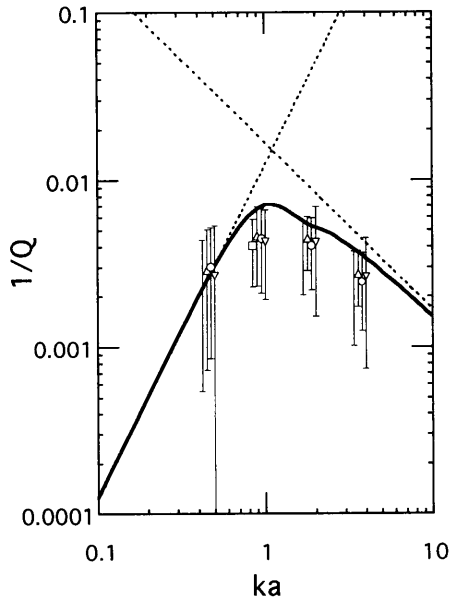


図4. 楕円形空隙群 (ケース1, $\varepsilon \approx 0.053$, $b/a = 0.5$, $\theta = 45^\circ$) による Q^{-1} と ΔV . 図の見方は図1と同様。