ランダム媒質中の弾性波の散乱減衰と因果律について

河原　純（茨城大学理学部地球生命環境科学科）

§1. はじめに

Wu (1982)と Sato (1982,1984)によるランダム媒質中の散乱減衰の理論では、前方散乱に起因する走時の揺らぎを補正した後の波動場の統計平均（平均波）のQ^{-1}値を、ボルン近似に基づいて評価する。しかしこの理論では、除去されるべき前方散乱の範囲を決める「カットオフ散乱角」θ_Cの値に任意性が残るという問題点がある。Wu は$\theta_C = 90°$, Sato は$\theta_C \approx 29°$を直感的に仮定し、後にはθ_Cの客観的推定のために様々な実験がおこなわれたが、明確な結論は未だ得られていない。

著者は以前、この問題を因果律の観点から検討し、2 および 3 次元ランダム速度不均質性によるスカラー波の散乱減衰について次節に述べるような結果を得た（河原, 1998）。現在、このアプローチの弾性波散乱への拡張を試みており、本講演ではその途中経過について報告する。以下、不均質性は一貫して微弱かつ等方的と仮定する。

§2. スカラー波の散乱減衰と因果律

因果律に従う減衰性波動がいわゆる Kramers-Krönig の関係を満たすことはよく知られている。同関係式からは次式が直ちに導かれる（Beltzer, 1988）。

$$\frac{c_\infty}{c_0} = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{Q^{-1}(\omega)}{\omega} d\omega \tag{1}$$

ここでωは角周波数、c_0, c_∞ はそれぞれ波動の位相速度の低周波および高周波極限値（$\omega \to 0$, $\omega \to \infty$）である。河原（1998）は、前方散乱除去（走時補正）後の平均波についても当然(1)式が成り立つと考え、スカラー波の散乱減衰の理論解$Q^{-1}(\omega) = Q^{-1}(\omega, \theta_C)$（Wu, 1982; Frankel and Clayton, 1986）を代入して積分を実行することにより、θ_Cとc_∞ / c_0を関係づける代数式を得た。ここで、媒質中の点$\boldsymbol{x}$におけるスカラー波速度を$V(\boldsymbol{x})$とし、

$$\delta V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}) - V_0, \quad V_0 = \langle V(\boldsymbol{x}) \rangle, \quad \varepsilon^2 = \langle \delta V(\boldsymbol{x})^2 \rangle / V_0^2 \tag{2}$$

と置くとき、不均質性の次元や微細構造によらず、

$$c_0 = \langle V^{-2} \rangle^{-1/2} \approx V_0 \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2\right) \tag{3}$$

となることが示される（Hill, 1963; Karal and Keller, 1964）ので、θ_Cはc_∞のみの関数となる。c_∞の値としては平均速度V_0, または平均走時に対応する平均スローネスの逆数

$$V_{RAS} \equiv \langle V(\boldsymbol{x})^{-1} \rangle^{-1} = V_0 (1 - \varepsilon^2) \tag{4}$$

が尤もらしいと思われる。$c_\infty = V_0$を仮定すると、3 および 2 次元の場合に対してそれぞれ$\theta_C^{3D} \approx 29°$と$\theta_C^{2D} \approx 24°$、$c_\infty = V_{RAS}$の場合は$\theta_C^{3D} = 60°$, $\theta_C^{2D} \approx 65°$という結果を与える。河原（1998）は、走時補正後の高周波平均波は平均走時で伝播すると見なすのが合理的と考え、後者の解が妥当と推論した。

§3. 1 次元ランダム弾性媒質の場合

因果律に起因する(1)式は不均質性の次元や波動の種類によらず常に成り立つはずである。以下では、P 波速度$\alpha(\boldsymbol{x})$、S 波速度$\beta(\boldsymbol{x})$、密度$\rho(\boldsymbol{x})$のランダムな揺らぎ

$$\delta\alpha(\mathbf{x})=\alpha(\mathbf{x})-\alpha_0,\quad \delta\beta(\mathbf{x})=\beta(\mathbf{x})-\beta_0,\quad \delta\rho(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x})-\rho_0,$$
$$\alpha_0=\langle\alpha(\mathbf{x})\rangle,\quad \beta_0=\langle\beta(\mathbf{x})\rangle,\quad \rho_0=\langle\rho(\mathbf{x})\rangle \tag{5}$$

による弾性波散乱への(1)式の適用を考える。ここではまず不均質性が 1 次元の場合を考える。この場合には P, S 波を問わず、速度揺らぎによる入射方向への前方散乱と、インピーダンス揺らぎによる逆方向への後方散乱の 2 種類だけが生じ、かつ前者は散乱減衰に寄与しないため、Q^{-1}はθ_Cによらず一意に定まる（Sato, 1982）。ここでさらに、Sato (1984)にならって

$$\frac{\delta\alpha(\mathbf{x})}{\alpha_0}=\frac{\delta\beta(\mathbf{x})}{\beta_0}\equiv\xi(\mathbf{x}),\quad \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\rho_0}=\nu\xi(\mathbf{x}),\quad \langle\xi(\mathbf{x})^2\rangle=\varepsilon^2 \tag{6}$$

と仮定すると、Q^{-1}の理論解は次式で表される。

$$Q_{1D}^{-1}(k)=(1+\nu)^2\varepsilon^2 k\,P_{1D}(2k) \tag{7}$$

ここでkは P 波波数（$k_P=\omega/\alpha_0$）または S 波波数（$k_S=\omega/\beta_0$）、$P_{1D}(k)$は$\xi(\mathbf{x})$の 1 次元パワースペクトルを表す。一方、1 次元不均質弾性媒質の巨視的弾性定数は Backus (1962)によって与えられ、また巨視的密度は平均密度ρ_0に一致することが示される（Kuster and Toksöz, 1974）。それらを用いることにより、P 波のc_0は次式で与えられることが示される。

$$c_0^P\approx\alpha_0\left[1-\frac{3}{2}\left\langle\frac{\delta\alpha^2}{\alpha_0^2}\right\rangle-\left\langle\frac{\delta\alpha\,\delta\rho}{\alpha_0\rho_0}\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta\rho^2}{\rho_0^2}\right\rangle\right]=\alpha_0\left[1-\left(\frac{3}{2}+\nu+\frac{\nu^2}{2}\right)\varepsilon^2\right] \tag{8}$$

上式は$\nu\to 0$で（密度が均質な場合）(3)式に帰着する。S 波の場合は(8)式においてαをβに置き換えればよい。(7), (8)式を(1)式に代入して計算すると、最終的に次式が得られる。

$$c_\infty^P=\alpha_0\left(1-\varepsilon^2\right),\quad c_\infty^S=\beta_0\left(1-\varepsilon^2\right) \tag{9}$$

これは

$$c_\infty^P=\alpha_{RAS}\equiv\langle\alpha^{-1}\rangle^{-1},\quad c_\infty^S=\beta_{RAS}\equiv\langle\beta^{-1}\rangle^{-1} \tag{10}$$

を意味し、河原（1998）の推論を裏付ける。

§4. 3 次元ランダム弾性媒質の場合

3 次元不均質弾性媒質の巨視的（静的）弾性定数（体積弾性率と剛性率）は、Beran and Molyneux (1966), Beran and McCoy (1970)らによって以下のように求められている。

$$K^*=\langle K\rangle-\frac{\langle\delta K^2\rangle}{\langle K+4\mu/3\rangle},\quad \mu^*=\langle\mu\rangle-\frac{2\langle K+2\mu\rangle\langle\delta\mu^2\rangle}{5\langle\mu\rangle\langle K+4\mu/3\rangle} \tag{11}$$

ここで$K=K(\mathbf{x})$, $\mu=\mu(\mathbf{x})$はそれぞれ媒質の各点での体積弾性率と剛性率、δKと$\delta\mu$はそれらの揺らぎ成分である。上式を用い、再び(6)式を仮定すると、計算の末に次式が得られる。

$$c_0^P\approx\alpha_0\left[1-\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{16}{15\gamma_0^2}\left(1-\frac{1}{\gamma_0^2}\right)\right](2+\nu)^2-\frac{1}{2}-\nu\right\}\varepsilon^2\right] \tag{12a}$$

$$c_0^S\approx\beta_0\left[1-\left\{\frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{3\gamma_0^2}\right)(2+\nu)^2-\frac{1}{2}-\nu\right\}\varepsilon^2\right] \tag{12b}$$

ここで$\gamma_0=\alpha_0/\beta_0$である。(12a)は密度が一定（$\nu\to 0$）でかつ音響波極限（$\gamma_0\to\infty$, ポアソン比$\sigma\to 0.5$）でスカラー波の場合の(3)式に帰着する。一方、Sato (1984)と同様に$\gamma_0=\sqrt{3}$（$\sigma=0.25$）と$\nu=0.8$を仮定すると次式が得られる。

$$c_0^P \approx \alpha_0\left(1-0.762\varepsilon^2\right),\quad c_0^S \approx \beta_0\left(1-0.616\varepsilon^2\right) \tag{13}$$

となる。しかるに、負の減衰は現実的にあり得ない（$Q^{-1} \geq 0$）ので、(1)式より

$$c_0 \leq c_\infty \tag{14}$$

でなければならないが、(9)式と(13)式の組み合わせはこの条件を満たさない。すなわち 1 次元の場合と異なり、3 次元の場合は$c_\infty^P \neq \alpha_{RAS}$，$c_\infty^S \neq \beta_{RAS}$という予想外の結論が得られた。

ここでさらに、Sato (1984)による 3 次元ランダム媒質中の弾性波散乱のQ^{-1}の理論解を(13)式とともに(1)式に代入し、θ_Cとc_∞の関係を調べてみることにした。ただしこの場合は、(1)式の積分を解析的に実行することは困難なので、媒質の不均質性を表す$\xi(\boldsymbol{x})$の自己相関関数は指数関数で与えられると仮定して数値積分をおこなった。その結果、意外なことに、少なくとも$c_\infty^P \leq \alpha_0$，$c_\infty^S \leq \beta_0$では(1)式を満足する解θ_Cが存在せず、それゆえ

$$c_\infty^P > \alpha_0,\quad c_\infty^S > \beta_0 \tag{15}$$

でなければならないことがわかった。

§5. 「インピーダンス型」ランダム媒質の場合

最後に、特殊な場合として速度は均質だが密度（インピーダンス）だけが揺らぎを持つ場合、すなわち

$$\frac{\delta\alpha(\boldsymbol{x})}{\alpha_0} = \frac{\delta\beta(\boldsymbol{x})}{\beta_0} = 0,\quad \frac{\delta\rho(\boldsymbol{x})}{\rho_0} = \xi(\boldsymbol{x}),\quad \left\langle \xi(\boldsymbol{x})^2 \right\rangle = \varepsilon^2 \tag{16}$$

という媒質を考える。このような「インピーダンス型」（Wu, 1989）ランダム媒質では、本質的に前方散乱が起こらず、それゆえ走時の揺らぎも生じないので、1 次元の場合と同様、Q^{-1}はθ_Cによらず一意に定まる。また、速度が均質なのであるから、

$$c_\infty^P = \alpha_0,\quad c_\infty^S = \beta_0 \tag{17}$$

となることが期待される。ここでは、与えられたQ^{-1}の理論解とc_0値とから実際に(17)式が導かれるかを確認してみる。1 次元の場合には(7)式（で$1+\nu$を1に置き換えたもの）と(8)式から(17)式が解析的に導かれる。3 次元の場合は、(12)式に対応して、

$$c_0^P \approx \alpha_0\left[1-\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{3\gamma_0^2}\right)^2 + \frac{4}{15\gamma_0^2}\left(1+\frac{2}{3\gamma_0^2}\right)\right\}\varepsilon^2\right],\quad c_0^S \approx \beta_0\left[1-\frac{1}{5}\left(1+\frac{2}{3\gamma_0^2}\right)\varepsilon^2\right] \tag{18}$$

が得られる。これと、Q^{-1}の理論解（再び指数関数型自己相関関数を仮定）とを(1)式に代入し、c_∞^Pとc_∞^Sを数値的に概算してみた。その結果、$\sqrt{2} < \gamma_0 < 3$（ポアソン比$0 < \sigma < 0.44$）程度であれば(17)式はほぼ満足されるが、γ_0の増加につれc_∞^Pは次第に減少し、音響波極限（$\gamma_0 \to \infty$，$\sigma \to 0.5$）では

$$c_\infty^P \approx \alpha_0\left(1-0.33\varepsilon^2\right) \tag{19}$$

になるという奇妙な結果が得られた。

§6. おわりに

ランダム弾性媒質のカットオフ散乱角を因果律の観点から検討すべく、いくつかの試算をおこなったが、結果的にいくつかの疑問点が呈示された。ランダム弾性媒質のc_∞が 1 次元と 3 次元とでなぜ本質的に食い違うのか、3 次元の場合のc_∞値はいくらか、またインピーダンス型ランダム媒質では速度揺らぎが無いにも関わらず、大きなポアソン比に対して

$c_\infty^P < \alpha_0$となるのはなぜか、等については、今後さらに検討を加えたい。

参考文献

Backus, G. E., 1962, J. Geophys. Res., **67**, 4427-4440.
Beltzer, A. I., 1988, Pure Appl. Geophys., **128**, 147-156.
Beran, M. J., and J. J. McCoy, 1970, Int. J. Solids Struct., **6**, 1035-1054.
Beran, M. J., and J. Molyneux, 1966, Q. Appl, Math., **24**, 107-118.
Frankel, A., and R. W. Clayton, 1986, J. Geophys. Res., **91**, 6465-6489.
Hill, R., 1963, J. Mech. Phys. Solids, **11**, 357-372.
Karal, F. C., and J. B. Keller, 1964, J. Math. Phys., **5**, 537-547.
河原　純, 1998, 日本地震学会講演予稿集, 1998 年秋季大会, A62.
Kuster, G. T., and M. N. Toksöz, 1974, Geophysics, **39**, 587-606.
Sato, H., 1982, J. Acoust. Soc. Am., **71**, 559-564.
Sato, H., 1984, J. Geophys. Res., **89**, 1221-1241.
Wu, R. S., 1982, Geophys. Res., Lett. **9**, 9-12.
Wu, R. S., 1989, Pure Appl. Geophys., **131**, 635-637.