不均質媒質中における地震波経路の確率微分方程式による表現

宮澤 理稔
京都大学大学院理学研究科

地震波線追跡を目的とした研究はより不均質性の大きい媒質中を伝播する地震波について行なわれている中で, 決定論的な議論がなされている. 一方で決定論的に扱うことは必ずしも経路の唯一性を保証するものではない. そこで本研究では不確定的に地震波経路を求め, 確率的に表現する手法の提案をし, 経路の評価を行なう. 尚ここでは地震波経路を波数 $k >> 1$ の波線として扱う.

波線が不均質性による散乱に伴い局所的に多重経路を取り, またそれらが地震学的に同じタイプの波の波線の束である場合を考える. 例えば直達 P 波の波線として走時も全く一致するような波線の集合が, 不均質性によって各々の近傍に存在するような場合である. この集合の要素が個々においては不均質媒質のため決定論的に決まらないものとし, 多重経路の生成を確率過程として定義することで解析的に評価する. この集合である波線束を基準となる波線に対する stochastic tube (以降 ST) と呼ぶことにする. N 次元実空間における d 次元の確率過程として波線に沿う時刻 t に対し, 震源から見た cross section 上の ST を $\boldsymbol{X}_{stc}(t)(=\{X^i_{stc}(t);\, 0 \le i \le d\} \in \boldsymbol{R}^N)$, 波線を中心と見た cross section 上の確率過程を $\boldsymbol{X}(t)(=\{X^i(t);\, 0 \le i \le d\} \in \boldsymbol{R}^N)$ とする. 震源を $\boldsymbol{0}$, 波線に沿ったベクトルを $\boldsymbol{x}(t)$ とし, 時刻 $t=0, t=T$ でそれぞれ震源と観測点を示すものとすれば,

$$X^i_{stc}(t) = \boldsymbol{x}(t) + X^i(t); \qquad 0 \le i \le d, \quad 0 \le t \le T \tag{1}$$

ST の定義より,

$$X^i(0) = X^i(T) = \boldsymbol{0}, \quad X^i_{stc}(0) = \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}, \quad X^i_{stc}(T) = \boldsymbol{x}(T). \tag{2}$$

$\boldsymbol{X}_{stc}(t)$ は基準となる波線に沿って生成されるので, その微小変化 $d\boldsymbol{X}_{stc}(t)$ は時刻 t から $t+dt$ の間に基準波線と同様の増加分と $\boldsymbol{x}(t+dt)$ に垂直な平面上で基準波線に向かう量を足した ST として観測点に収束するベクトルと、拡散による効果を足し合わせることによって得られる. これらはそれぞれ,

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t))\,dt (= d\boldsymbol{x}(t)), \tag{3}$$

$$\frac{1}{T-t}\left\{\int_0^t \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t))\,dt - X^i_{stc}(t)\right\}, \tag{4}$$

$$\alpha^i(X^i_{stc}(t))\,d\boldsymbol{B}(t), \tag{5}$$

と表されるので,

$$dX^i_{stc}(t) = (3) + (4) + (5) = \alpha^i\,d\boldsymbol{B}(t) + b^i\,dt, \quad 0 \le \forall t < T. \tag{6}$$

ここで v は任意の点における地震波速度, α は拡散係数, $\boldsymbol{B} = \left(B^k\right)_{1 \le k \le N}$ は N- 次元ブラウン運動, また

$$b^i = \frac{1}{T-t}\left\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)T + \int_0^t (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t))|_t)\,dt - X^i_{stc}(t)\right\} \tag{7}$$

はドリフト係数と呼ばれる. 確率微分方程式 (6) の解は解析的に,

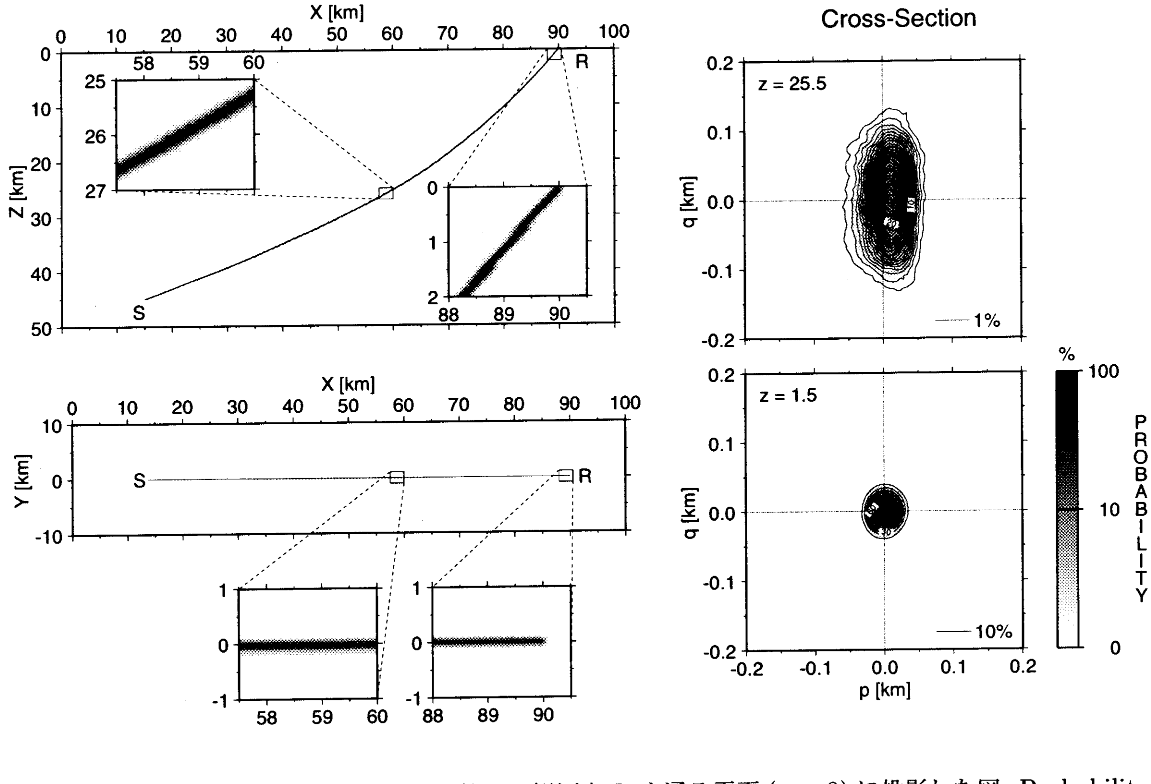
$$X^i_{stc}(t) = \boldsymbol{x}(t) + (T-t)\int_0^t \frac{\alpha^i}{T-t}\,d\boldsymbol{B}(t), \quad \forall t \in [0, T) \tag{8}$$

と与えられ, しかも α^i と b^i が $0 \leq t < T$ で Lipschitz 条件を満たすので唯一的である. 式 (8) の第二項は確率変数による積分なので通常の Stieltjes 積分として定義することはできないが, 伊藤の確率積分として数学的に意味付けが与えられている. 尚 $t \uparrow T$ では, 期待値が

$$E\left[\left|X^i_{stc}(t) - \boldsymbol{x}(t)\right|^2\right] = \left|(T-t)\int_0^t \frac{\alpha}{T-t}\,dt\right|^2 \to 0 \tag{9}$$

となるので明らかに ST として観測点に収束する. また確率密度関数として $P(X^i_{stc}(t))$ が与えられる.

三次元の不均質媒質に対し, 点震源を深さ 45 km に仮定し, 震央距離 80 km の地表で直達 P 波を観測するものとして P 波波線に対する ST をその定義を満たすべく (8) により計算した. 媒質は深さ 50 km から 地表にかけて P 波伝播速度が 8.0 km/s から 5.0 km/s と徐々に変化する水平成層構造を背景とする構造に不均質性の大きさ $a \sim 10^0$ km である -1 - $+1\%$ の速度擾乱をランダムに与え, 散乱係数が 10^{-2}/km 程度のオーダーであるものとした.



左上図　P 波波線に対する ST を震央, 震源 S, 観測点 R を通る平面 $(y=0)$ に投影した図. Probability は ST が 0.1 km × 0.1 km の格子に含まれる確率を示したもの.

左下図　ST を水平平面 $(z=0)$ に投影した図.

右図　深さ $z = 25.5, 1.5$ km における波線に対する ST の cross section. p 軸及び q 軸はそれぞれ地震波線に直交する水平方向の成分及び深さ方向を負とした鉛直成分を含む成分. (0,0) は基準波線. 地震波の伝播方向は $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}$. Probability は $\boldsymbol{X}$ が任意の点に対し半径 0.025 km の円内に含まれる確率を示す.

参考文献

舟木直久, 確率微分方程式, 岩波書店, 1997.

宮澤理稔・中西一郎, 確率微分方程式による波線追跡, 日本地震学会講演予稿集 1999 年度秋季大会, C71, 1999.