

# ランダム音響媒質中の散乱減衰に対する「カットオフ散乱角」について

河原 純 (茨城大学理学部地球生命環境科学科)

## § 1. はじめに

Wu (1982) と Sato (1982, 1984) によって提唱された地震波の散乱減衰の理論では、ボルン近似に基づき、媒質の速度や密度のランダムな摂動による散乱波のパワーの総和により  $Q^{-1}$  を定義する。その際、ある角度以内の前方散乱は減衰に寄与しないと見なす (Wu, 1982) か、あるいはある波長以上の不均質成分は減衰ではなく走時の揺らぎに寄与するとしてその効果を補正する (Sato, 1982, 1984)。両仮定は実質上 (スカラー波の場合には厳密に) 等価であることが示され、高周波領域での  $Q^{-1}$  の過大評価を防ぎ、観測と調和的な  $Q^{-1}$  を与える。しかし、除去されるべき前方散乱の範囲を決める「カットオフ散乱角」 $\theta_C$  の値自体は自明ではない。後年、実験的に評価された  $\theta_C$  の推定値の多くは  $15^\circ \sim 45^\circ$  の範囲内に収まるものの、数度程度から  $90^\circ$  に至るまで広くばらつき、長らく決着を見なかった。

前回 (1998 年度発表会)、著者はランダム媒質中のスカラー波の散乱減衰に関する  $\theta_C$  値を、因果律からの制約条件に基づいて検討した。その結果、波動の因果律を表す Kramers-Krönig の関係に、Wu によるスカラー波散乱の  $Q^{-1}$  の解を適用することにより、位相速度の低周波および高周波極限值  $c_0$ 、 $c$  と  $\theta_C$  の間に単純な関係式が成り立つことを示した。さらに  $c_0$  値を弾性体の静力学的理論、 $c$  値を波線理論的考察に基づいて与えることにより、3 次元の場合は  $\theta_C = 60^\circ$ 、2 次元では  $\theta_C = 65^\circ$  という結果を得た。これは限定的ながら、カットオフ散乱角を理論的に求めた最初の例であろう。今回は前回への若干の補足をするとともに、その結果が数値実験と合わない原因の候補として、回折が  $\theta_C$  に与える効果に関して考察をおこなう。

## § 2. スカラー波散乱と音響散乱の等価性

前回の  $\theta_C$  の推定では、 $Q^{-1}$  はスカラー波散乱の理論解、 $c_0$  は音響媒質 (剛性率ゼロの弾性媒質) での値を仮定したが、厳密にはスカラー波は音響波の短波長近似に過ぎない。前回への補足として、両者が同一視できることを付言する。音響媒質を伝わる入射音響波の変位を  $\mathbf{u}^0$ 、局在化した不均質による散乱波の変位を  $\mathbf{u}^1$  と置き、 $|\mathbf{u}^0| \gg |\mathbf{u}^1|$  (ボルン近似) および密度一定を仮定すると、 $\mathbf{u}^1$  の満たすべき運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{\mathbf{u}}^1 - V_0^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}^1) = 2V_0 \delta V (\nabla \cdot \mathbf{u}^0) + 2V_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^0) \quad [ \nabla = (\partial / \partial x_1, \partial / \partial x_2, \partial / \partial x_3) ] \quad (1)$$

ここで、 $V(\mathbf{x})$  は媒質内の点  $\mathbf{x}$  での音響波速度、 $\delta V = V(\mathbf{x}) - V_0$  は速度の空間的揺らぎ、 $V_0 = \langle V(\mathbf{x}) \rangle$  は平均速度である。(1)式の両辺の発散を取れば、スカラーポテンシャル  $\Phi^j = \nabla \cdot \mathbf{u}^j$  に関する表式

$$\ddot{\Phi}^1 - V_0^2 \nabla^2 \Phi^1 = 2V_0 \delta V \nabla^2 \Phi^0 + 4V_0 (\nabla \delta V) \cdot (\nabla \Phi^0) + 2V_0 \Phi^0 \nabla^2 \delta V \quad (2)$$

が得られる。さらに、上式で右辺第 2 項以降を無視すると、Wu や Sato が用いたスカラー散乱波の表式に帰着する。この近似は、一般には  $\delta V$  の空間スケールに比べ入射波長が十分短い場合に有効である (例えば Aki and Richard, 1980)。しかし今の場合、(2)式の解  $\mathbf{u}^1$  への右辺第 2 項と第 3 項の寄与は打ち消し合うことが示される。すなわち、密度一定条件下では音響波とスカラー波の散乱は等価であり、それゆえ前回の手法は妥当である (あるいは、前回の結果はランダム音響媒質についても成立する)。ただし Wu と Sato の理論の等価性が、音響波に関しては (通常の弾性波と同様) あくまで近似にすぎない点は注意を要する。

## § 3. 回折による $\theta_C$ 値の増大の可能性

前述のように、前回求めた  $\theta_C$  値はほとんどの実験値よりも大きい。その理由の一つとして、(Wu

らの理論では無視されている) 回折の効果が考えられる。短波長入射波の見かけ伝播速度が伝播距離とともに増大する現象は「速度シフト」と呼ばれることがあり (Roth *et al.*, 1993)、回折により波線が低速度域を迂回する結果と解釈される。弱い回折の効果を考慮した波線理論 (Boyse, 1986; Roth *et al.*, 1993) によれば、伝播距離  $L$  における短波長入射波の走時の期待値 (平均値) は

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{1}{V} \right\rangle \left[ 1 + p \varepsilon^2 \int_0^L (L - \xi)^2 \frac{N(\xi)}{\xi} d\xi \right] \quad (3)$$

で与えられる。ただし  $p = (D-1)/2$ 、 $D$  は空間次元である。上式は  $N(r)/r$  ( $N(r)$  は速度揺らぎの自己相関関数) が可積分な場合にのみ有効であり、指数関数型 ( $N(r) = \exp(-r/a)$ ) のように  $N(0) = 0$  の場合には直接は適用できないことに注意されたい。(3)式に対して、伝播速度を  $V_{\text{diff}} = L/\langle T \rangle$  と定義すると、

$$V_{\text{diff}} = V_0 \left[ 1 + \varepsilon^2 \{ p M(L) - 1 \} \right], \quad M(L) = -\frac{1}{L} \int_0^L (L - \xi)^2 \frac{N(\xi)}{\xi} d\xi \quad (4)$$

(このような大域的定義に対し、 $V_{\text{diff}} = L/\langle T \rangle$  という局所的定義も可能だろう。 $V_{\text{diff}}$  と  $Q^{-1}$  の定義の仕方が矛盾しない事が重要であろう。) ここで  $c = V_{\text{diff}}$  と見なせば、前回の結果より

$$\theta_C = 2 \sin^{-1} \frac{1}{2(M+1)} \quad (3 \text{次元}); \quad \theta_C = 2 \tan^{-1} \frac{2}{\pi(M+1)} \quad (2 \text{次元}) \quad (5)$$

が得られる。例として 3次元ガウス型媒質 ( $N(r) = \exp(-r^2/a^2)$ ) を考えると、(4)式より、

$$M(L) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left( \frac{L}{a} \right) \left[ \frac{L}{a} + \frac{a}{2L} \right] + e^{-L^2/a^2} - 2 \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (6)$$

$V_{\text{diff}}(L)$  ( $\varepsilon = 0.01$ を仮定) と  $\theta_C(L)$ を右図に示す。伝播に連れて  $V_{\text{diff}}(L)$ が加速し、一方  $\theta_C$ は急速に減少して  $L/a > 4$  では  $\theta_C < 10^\circ$  となるのがわかる。 $L/a \gg 1$ では  $\theta_C \sim 0^\circ$  となり、 $Q^{-1}$ 値は前方散乱を無視しない(または走時補正をしない)場合の値に漸近する。この傾向は、短波長音響入射波の振幅スペクトルの散乱減衰を Rytov 近似に基づいて評価した Shapiro and Kneib (1993)の結果と調和的である。

結論として、回折の効果を考慮した結果、 $\theta_C$ はわずかな伝播距離で数度程度にまで減少することがわかり、今度は実験値の大半より小さくなってしまった。Roth *et al.* (1993)によれば、2次元ガウス型媒質の場合の彼らの理論の有効範囲はだいたい  $\varepsilon(L/a)^{3/2} < 1$  である。過去の実験の多くはこの範囲を超えており、直接の比較は難しいかもしれない。 $\theta_C$ の伝播距離依存性を解明するためには、慎重に制御された数値実験が必要であろう。

## 参考文献

Aki, K., and P. G. Richards, 1980, *Quantitative seismology*, W. H. Freeman, San Francisco; Boyse, W. E., PhD thesis, Stanford University; Roth, M., G. Müller, and R. Snieder, 1993, *Geophys. J. Int.*, **115**, 552-563; Sato, H., 1982, *J. Acoust. Soc. Am.*, **71**, 559-564; Sato, H., 1984, *J. Geophys. Res.*, **89**, 1221-1241; Shapiro, S. A., and G. Kneib, 1993, *Geophys. J. Int.*, **114**, 373-391; Wu, R. S., 1982, *Geophys. Res. Lett.* **9**, 9-12.

