

マルコフ近似に基づく弾性波のエンベロープ導出法：
 ガウス型自己相関関数を持つ2次元ランダム媒質の場合

佐藤春夫 (東北大理) Michael Korn (Leipzig Univ.)

はじめに

ランダム媒質を伝わる波動は、伝播距離の増加と共に前方散乱によってその形を崩し、主要動の継続時間は増大する。ここでは、ランダム弾性媒質のゆらぎがガウス型の自己相関関数(ゆらぎ ε 、相関距離 a)で表され、そこへ弾性平面波パルスが入射する場合を考察する。図1は、差分法によって計算した伝播距離100kmにおける波形であり、図2はその2乗振幅エンベロープの平均を示したものである。

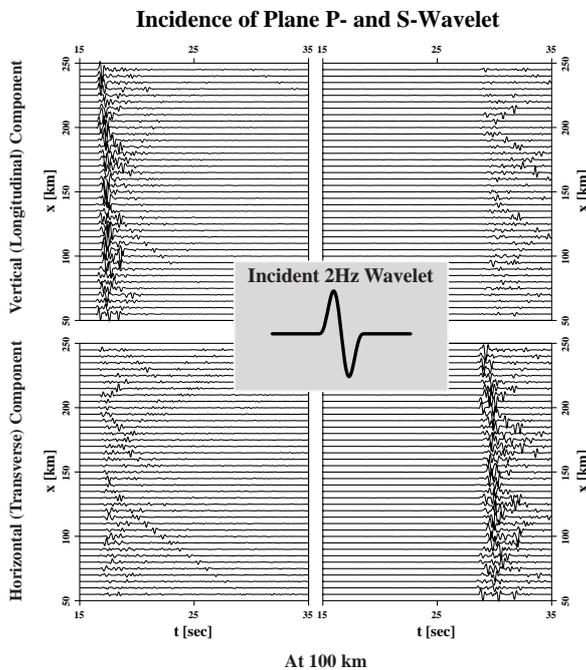


図1. ガウス型スペクトルを持つランダム弾性媒質に入射した平面波パルス(中心周波数2Hz)は伝播と共に崩れる。上図は、差分法によって計算した伝播距離100 kmにおける波形を示す。左はP波入射、右はS波入射の場合。

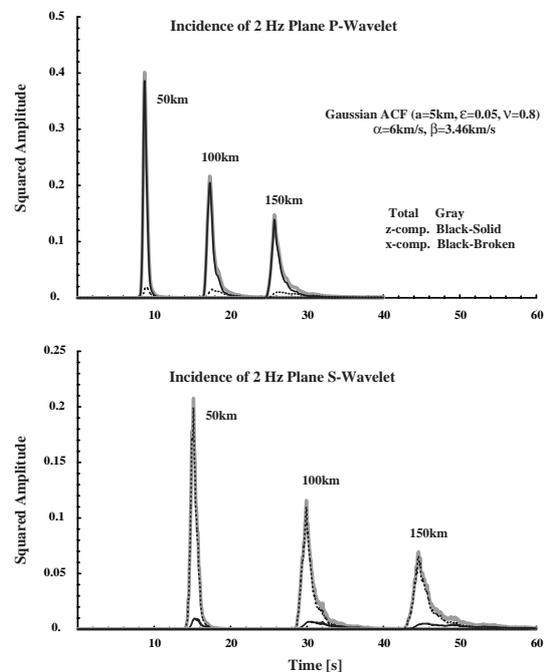


図2. ガウス型スペクトルをもつランダム弾性媒質に入射した平面波パルス(中心周波数2Hz)のMSエンベロープ(差分法による計算)。上図はP波入射、下図はS波入射の場合。

マルコフ近似

波長がゆらぎのスケールよりも十分小さく弾性係数の空間微分項を無視できる場合には、P波とS波のポテンシャル場はそれぞれ独立に放物型波動方程式に従うと考えてよい。波形のエンベロープに着目する場合には統計的な取り扱いが可能となり、直達波近傍の2乗平均(MS)エンベロープ形状をマルコフ近似によって導出することができる。

ポテンシャル場の2周波数相互相関関数 ${}_0\Gamma_2$ は波の進行方向について1階の放物型微分方程式を解くことで得られ、その強度(MSエンベロープ \hat{I}_0)は ${}_0\Gamma_2$ のフーリエ変換で与えられる。波の進行を z 方向としたとき、 x 座標に関する ${}_0\Gamma_2$ のフーリエ変換 ${}_0\check{\Gamma}_2$ は角度スペクトルを与える。P波の場合、 V_0 をP波平均速度とすると、伝播距離 z における角周波数 ω_c でのポテンシャル場のMSエンベロープは ${}_0\check{\Gamma}_2$ の波数積分の形で

$$\hat{I}_0(z, t; \omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d e^{-i\omega_d(t-z/V_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x {}_0\check{\Gamma}_2(k_x, z, \omega_d) \quad (1)$$

と表すことができる。x成分のMSエンベロープは、これに正弦の自乗 k_x^2/k_c^2 をかけた波数積分の形で、

$$\hat{I}_{0_x}(z, t; \omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d e^{-i\omega_d(t-z/V_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{k_x^2}{k_c^2} {}_0\check{\Gamma}_2(k_x, z, \omega_d) \quad (2)$$

と書くことができる($k_c = \omega_c/V_0$)。同様に、z成分は

$$\hat{I}_{0_z}(z, t; \omega_c) \equiv \hat{I}_0(z, t; \omega_c) - \hat{I}_{0_x}(z, t; \omega_c), \quad (3)$$

で表される。S波の場合には、 V_0 をS波平均速度とし、x成分とz成分を入れ替えればよい。

平面波のエンベロープ

半無限($0 \leq z < \infty$)に広がるランダム弾性媒質にデルタ関数型のパルス波が入射した場合、MSエンベロープは、次式のように解析的に表すことができる。

$$\hat{I}_{0_x}(z, t; \omega_c) = \frac{4V_0 t_M}{z} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d e^{-i\omega_d(t-z/V_0)} \frac{\tan s_0}{s_0 \sqrt{\cos s_0}}, \quad (4)$$

$$\hat{I}_{0_z}(z, t; \omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_d e^{-i\omega_d(t-z/V_0)} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos s_0}} - \frac{4V_0 t_M}{z} \frac{\tan s_0}{s_0 \sqrt{\cos s_0}} \right). \quad (5)$$

ここで $t_M \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2V_0} \frac{\varepsilon^2}{a} z^2$ および $s_0 = 2e^{\pi i/4} \sqrt{t_M \omega_d}$ であり、ガウス型の場合、エンベロープ形状は周波数によらない。(4)式の係数から、P波の場合、伝播方向に直交する成分の自乗振幅は $(\varepsilon^2/a)z$ に比例して大きくなるのがわかる。図3は、ガウス型スペクトル持つランダム媒質における理論エンベロープと角度スペクトルの時間変化を示す。

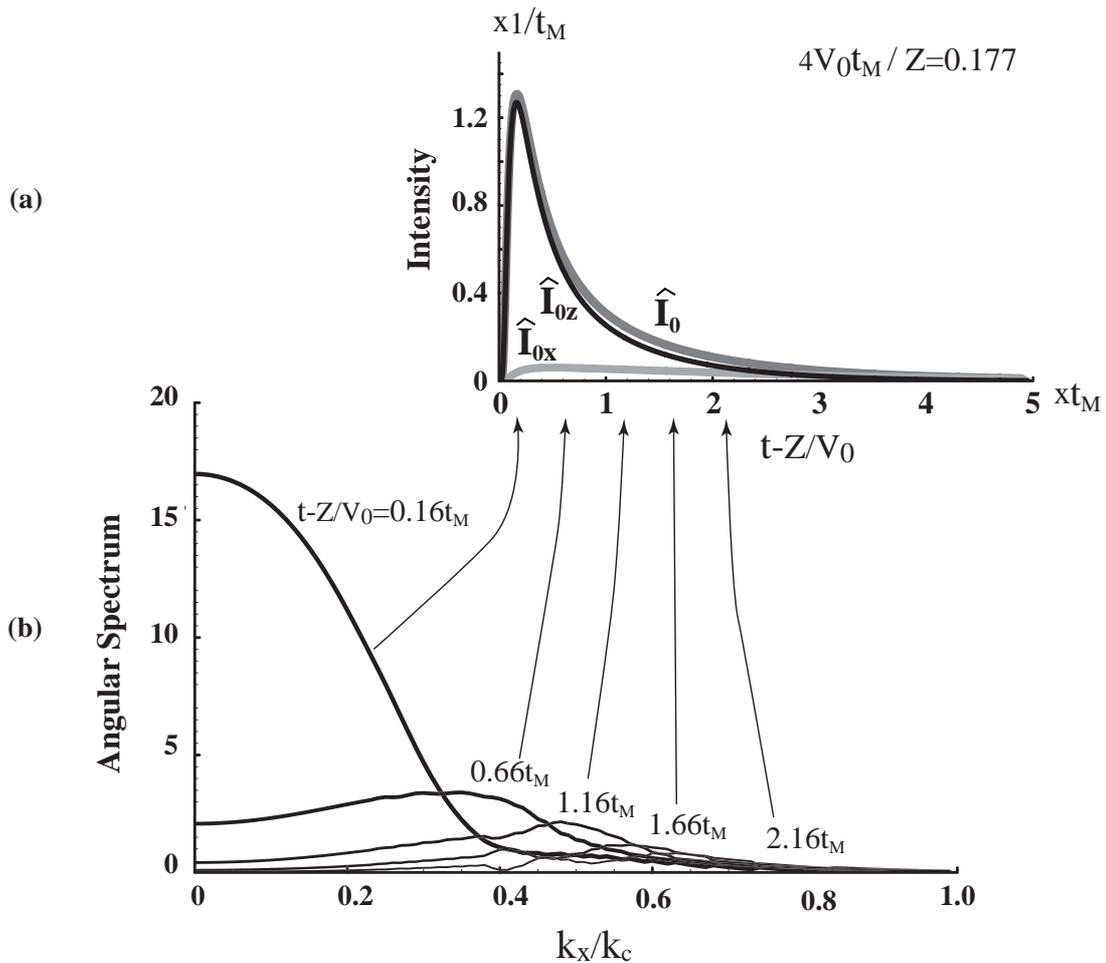


図3 . (a) ガウス型スペクトル持つランダム媒質における理論エンベロープ . (b) 角度スペクトルの時間変化 .

シミュレーション例

図4にマルコフ近似による理論エンベロープ(実線)と差分計算によるエンベロープ(灰色)との比較を示す . 図5は , 伝播距離100kmにおけるP波入射の場合の理論エンベロープ(実線)と差分計算によるエンベロープ(灰色)との比較を , 拡大して示す . z成分の振幅は , 最大振幅の着信時にはx成分の振幅よりも大きい , 時間経過と共にその振幅比は逆転する . 実際 , 差分法による波動の数値シミュレーション(灰色)でこの振幅逆転を確認することができる . このように , マルコフ近似理論は , ベクトル弾性波の場合についても , 差分計算によるエンベロープをよく説明できる .

まとめ

ガウス型スペクトルをもつ2次元ランダム弾性媒質におけるベクトル波形エンベロープの形成を , マルコフ近似に基づいて定式化した . 角度スペクトルの概念を導入することにより , MSエンベロープを解析的に導出することが可能である . 理論解は差分法によるシミュレーションで求められたエンベロープを定量的に説明することができる .

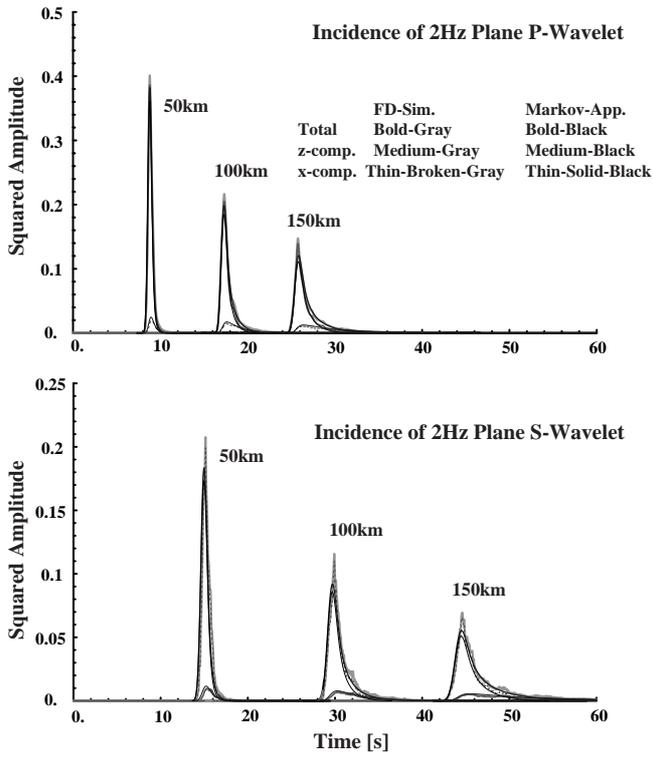


図 4. ガウス型スペクトル持つランダム媒質における理論エンベロープ (実線) と差分計算によるエンベロープ (灰色) との比較 .

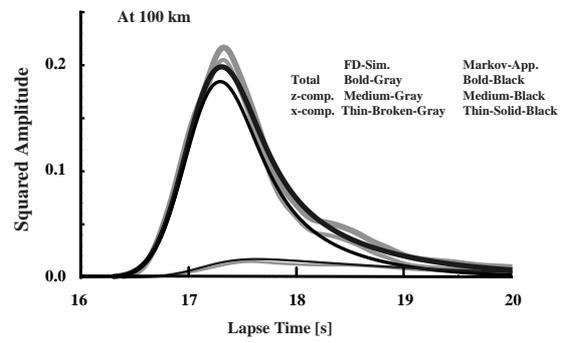


図 5. ガウス型スペクトル持つランダム媒質における理論エンベロープ (実線) と差分計算によるエンベロープ (灰色) との比較の拡大図 (伝播距離 100km). P 波入射の場合 .